elon lages lima

espaços métricos

PROJETO

EUCLIDES

elon lages lima

espaços métricos

elon lages lima

espaços métricos

Este livro ganhou o "Prêmio Jabuti", categoria Ciências, outorgado pela Câmara Brasileira do Livro em 1978.

INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Impresso no Brasil / Printed in Brazil

Capa: Casa do Desenho - Eli Beatriz Kuhnert e Sérgio R. Vaz.

Títulos Publicados:

- Curso de Análise, Volume 1 - *Elon Lages Lima*
- Medida e Integração - *Pedro Jesus Fernandez*
- Aplicações da Topologia à Análise - *Chaim Samuel Hönig*
- Espaços Métricos - *Elon Lages Lima*
- Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais - *Djairo Guedes de Figueiredo*
- Introdução aos Sistemas Dinâmicos - *Jacob Palis Junior e Wellington C. de Melo*
- Introdução à Álgebra - *Adilson Gonçalves*
- Aspectos Teóricos da Computação - *Cláudio L. Lucchesi, Imre Simon, Istvan Simon, Janos Simon e Tomasz Kowaltowski*
- Teoria Geométrica das Folheações - *Alcides Lins Neto e César Camacho*
- Geometria Riemanniana - *Manfredo P. do Carmo*
- Lições de Equações Diferenciais Ordinárias - *Jorge Sotomayor*
- Probabilidade: Um Curso em Nível Intermediário - *Barry R. James*
- Curso de Análise, Volume 2 - *Elon Lages Lima*
- Teoria Ergódica - *Ricardo Mañé*
- Teoria dos Números Algébricos - *Otto Endler*
- Operadores Auto-Adjuntos e Equações Diferenciais Parciais - *Javier Thayer*
- Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução - *Rafael Iório Jr. e Valéria Iório*
- Álgebra: Um Curso de Introdução - *Arnaldo Leite P. Garcia e Yves Albert E. Lequain*
- Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento - *Elon Lages Lima*
- Funções de uma Variável Complexa - *Alcides Lins Neto*
- Elementos de Álgebra - *Arnaldo Garcia e Yves Lequain*
- Introdução à Geometria Analítica Complexa - *Marcos Sebastiani*
- Curso de Teoria da Medida - *Augusto Armando de Castro Júnior*
- Introdução à Teoria da Medida - *Carlos Isnard*
- Introdução à Teoria de Controle e Programação Dinâmica - *Johann Baumeister e Antonio Leitão*
- Homologia Básica - *Elon Lages Lima*
- Teoria dos Números: um Passeio com Primos e outros Números Familiares pelo Mundo Inteiro - *Fabio Brochero Martinez, Carlos Gustavo Moreira, Nicolau Saldanha e Eduardo Tengan*
- Introdução à Análise Funcional – *César R. de Oliveira*

Distribuição:
IMPA
Estrada Dona Castorina, 110
22460-320 Rio de Janeiro, RJ
e-mail: ddic@impa.br
http://www.impa.br

Prefácio

Este livro foi escrito para servir de texto a um curso sobre Espaços Métricos, como uma introdução à Topologia. Um tal curso não deve ser lecionado antes do último ou penúltimo ano de graduação. De fato, os alunos tirarão maior proveito dos assuntos aqui abordados se já olharem para épsilons e deltas com a familiaridade que se adquire depois de um ou dois semestres de Análise.

Estritamente falando, o único pré-requisito formal para a leitura deste livro é a linguagem (e a notação) de Conjuntos. Mas, se bem que nenhum resultado específico de Análise seja essencial para o entendimento da matéria aqui tratada, uma experiência anterior com os métodos de demonstração daquela disciplina facilitará bastante o acompanhamento da exposição. Além disso, um certo conhecimento de Análise ajudará o leitor a apreciar o significado das aplicações da teoria dos Espaços Métricos, tanto nos exemplos que apresentamos como nos que encontrará depois.

Existe uma regra segundo a qual todo autor que reescreve um livro, necessariamente o torna pior. Se isto for verdade, sou duas vezes culpado do mesmo crime.

Com efeito, o que originou o presente trabalho foram umas notas mimeografadas que escrevi quando ainda era aluno da faculdade, e que gozaram de alguma popularidade entre os iniciantes na Topologia há alguns anos. Elas foram radicalmente refeitas para serem texto de curso no 10º Colóquio Brasileiro de Matemática. Além de modernizar e ampliar a versão original, procurei apresentar algumas aplicações, como o Teorema Fundamental da Álgebra, a existência de funções contínuas sem derivada em nenhum ponto, o Teorema de Picard sobre existência e unicidade de solução para equações diferenciais ordinárias, o Teorema de Montel sobre famílias normais de funções analíticas, a curva de Peano, o Teorema de Stone-Weierstrass, etc. Espero que esses exemplos dêem uma pequena idéia da força e da versatilidade das teorias aqui expostas. Ao texto do Colóquio acrescentei cerca de 400 exercícios, o §11 do Capítulo 8 e um capítulo sobre espaços separáveis. Todo o esforço

foi feito para tornar este livro uma exceção à regra acima citada.

Organizar a lista de exercícios propostos neste livro foi talvez a parte mais divertida da tarefa de escrevê-lo. Espero que uma parcela do fascínio que senti ao selecionar, descobrir, formular e resolver esses problemas se transmita ao leitor. Não se pode esperar aprender Matemática contemplativamente. Apelo, portanto, ao leitor para que tente resolver os exercícios que lhe pareçam mais atraentes e/ou desafiadores. Não os queira resolver um por um, nem os ataque necessariamente na seqüência em que são apresentados. Isto poderia consumir muito tempo. Mas procure ler o enunciado de cada um. E boa sorte na viagem que ora inicia.

Ao finalizar, cumpro o agradável dever de agradecer a João Beal Vargas e Oclide Dotto por terem apontado várias correções no texto mimeografado.

Rio de Janeiro, 10 de setembro de 1976

Elon Lages Lima

Prefácio da Terceira Edição

Não há mudanças essenciais no livro; foram apenas corrigidos alguns erros. Quero agradecer aos colegas que tiveram a bondade de m'os comunicar, destacando entre eles Jesus Alfonso Perez, Nilson Nunes de Castro e Oclide Dotto.

Rio de Janeiro, abril de 1993

Elon Lages Lima

Conteúdo

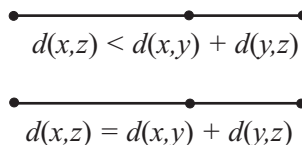
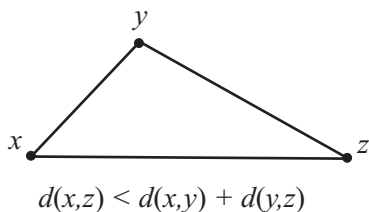
Capítulo 1

Espaços Métricos

1 Definição e exemplos de espaços métricos

Uma *métrica* num conjunto M é uma função $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$, chamado a *distância* de x a y, de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in M$:

d1) $d(x, x) = 0$;
d2) Se $x \neq y$ então $d(x, y) > 0$,
d3) $d(x, y) = d(y, x)$;
d4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Os postulados d1) e d2) dizem que $d(x, y) \geq 0$ e que $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$. O postulado d3) afirma que a distância $d(x, y)$ é uma função simétrica das variáveis x, y. A condição d4) chama-se *desigualdade do triângulo*; ela tem origem no fato de que, no plano euclidiano, o comprimento de um dos lados de um triângulo não excede a soma dos outros dois.

Um *espaço métrico* é um par (M, d), onde M é um conjunto e d é uma métrica em M. Na maioria das vezes, salvo quando houver possibilidade de dúvida, diremos simplesmente "o espaço métrico M", deixando subentendida qual a métrica d que está sendo considerada.

Os elementos de um espaço métrico podem ser de natureza bastante arbitrária: números, pontos, vetores, matrizes, funções, conjuntos, etc. Mas nós os chamaremos sempre os *pontos* de M.

Daremos agora alguns exemplos de espaços métricos.

Exemplo 1. *A métrica "zero-um".* Qualquer conjunto M pode tornar-se um espaço métrico de maneira muito simples. Basta definir a métrica $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$ pondo $d(x, x) = 0$ e $d(x, y) = 1$ se $x \neq y$. As condições d1) a d4) são facilmente verificadas. O espaço métrico que se obtém desta maneira é, naturalmente, bastante trivial, embora seja útil para contra-exemplos.

Exemplo 2. *Subespaço; métrica induzida.* Se (M, d) é um espaço métrico, todo subconjunto $S \subset M$ pode ser considerado, de modo natural, como espaço métrico: basta considerar a restrição de d a $S \times S$, ou seja, usar entre os elementos de S a mesma distância que eles possuíam como elementos de M. Quando isto é feito, S chama-se um *subespaço* de M e a métrica de S diz-se *induzida* pela de M. Esta idéia óbvia nos permite obter uma grande variedade de exemplos de espaços métricos, considerando os diversos subconjuntos de um espaço métrico dado.

Exemplo 3. *A reta*, ou seja, o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, é o exemplo mais importante de espaço métrico. A distância entre dois pontos $x, y \in \mathbb{R}$ é dada por $d(x, y) = |x - y|$. As condições d1) a d4) resultam imediatamente das propriedades elementares do valor absoluto de números reais. Esta é a chamada "métrica usual" da reta. A menos que seja feita menção explícita em contrário, é a ela que nos referiremos sempre que considerarmos $\mathbb{R}$ como espaço métrico.

Exemplo 4. *O espaço euclidiano* $\mathbb{R}^n$. Este exemplo generaliza o anterior. Os pontos de $\mathbb{R}^n$ são as listas $x = (x_1, \ldots, x_n)$ onde cada uma das n coordenadas x_i é um número real. Há três maneiras naturais de se definir a distância entre dois pontos em $\mathbb{R}^n$. Dados

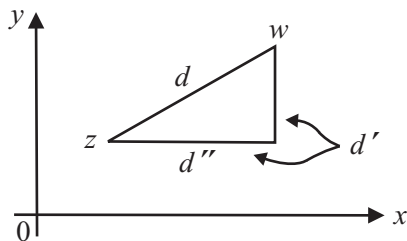
$x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$, escreveremos:

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right]^{1/2},$$

$$d'(x,y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \quad \text{e}$$

$$d''(x,y) = \max\left\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\right\} = \max_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|.$$

As funções $d, d', d'' \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são métricas. De fato, elas cumprem obviamente as condições d1), d2) e d3). A condição d4) é imediata para d' e d'', e será verificada para d no Exemplo 7, abaixo. A métrica d é chamada *euclidiana*. Ela provém da fórmula para a distância entre dois pontos do plano (em coordenadas cartesianas), a qual se prova com o Teorema de Pitágoras. Evidentemente, para considerações de natureza geométrica, d é a métrica natural pois fornece a distância da Geometria Euclidiana. Por outro lado, d' e d'' são formalmente mais simples, de manipulação mais fácil. Por isso, e por serem ambas "equivalentes" a d, num sentido que esclareceremos no Capítulo 2, vale a pena considerá-las, apesar de seus significados ligeiramente artificiais. O caso particular $n = 2$ nos dá o *plano* $\mathbb{R}^2$, cujos pontos indicaremos com a notação mais simples $z = (x, y)$, $w = (u, v)$, etc. Muitas vezes identificaremos $\mathbb{R}^2$ com o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos, mediante a correspondência $(x, y) \leftrightarrow x + iy$, onde $i = \sqrt{-1}$. A vantagem desta identificação reside no fato de que $\mathbb{C}$ possui uma multiplicação com propriedades interessantes. Também para $n = 3$, quando obtemos o espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ da Geometria Sólida tradicional, usaremos a notação $p = (x, y, z)$, mais simples do que $p = (x_1, x_2, x_3)$.

Uma interpretação intuitiva para a métrica d' pode ser obtida, no caso $n = 2$, imaginando que o plano $\mathbb{R}^2$ é a planta de uma cidade cujas ruas são retas paralelas aos eixos coordenados $x = 0$ e $y = 0$. Então o menor caminho ligando z a w através das ruas tem comprimento igual a $d'(z, w) = |x - u| + |y - v|$. A figura abaixo fornece uma comparação entre as distâncias $d(z, w)$, $d'(z, w)$ e $d''(z, w)$.

Para uso posterior, registramos aqui a

Proposição 1. *Sejam d, d' e d'' as métricas definidas no Exemplo 4. Quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$, tem-se:*

$$d''(x,y) \leq d(x,y) \leq d'(x,y) \leq n \cdot d''(x,y).$$

Demonstração: A única dessas desigualdades que não é inteiramente óbvia é a segunda. Ela se prova notando que $[d(x,y)]^2 = \Sigma\,(x_i - y_i)^2$ enquanto que

$$[d'(x,y)]^2 = \Sigma\,(x_i - y_i)^2 + 2\sum_{i<j} |x_i - y_i| \cdot |x_j - y_j|.$$

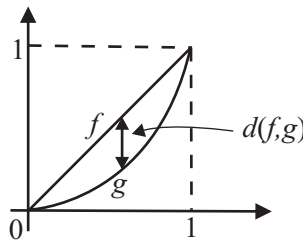
Observação. Quando não dissermos explicitamente que métrica estamos utilizando em $\mathbb{R}^n$, fica subentendido que se trata da euclidiana.

As notações d, d' e d'' não serão usadas consistentemente para indicar as métricas em $\mathbb{R}^n$ acima definidas. Assim, por exemplo, se estivermos usando apenas a métrica d'' num determinado contexto, poderemos chamá-la d, por simplicidade.

Exemplo 5. *Um espaço de funções.* Seja X um conjunto arbitrário. Uma função real $f\colon X \to \mathbb{R}$ chama-se *limitada* quando existe uma constante $k = k_f > 0$ tal que $|f(x)| \leq k$ para todo $x \in X$. Indicaremos com $\mathcal{B}(X;\mathbb{R})$ o conjunto das funções limitadas $f\colon X \to R$. A soma, a diferença e o produto de funções limitadas são ainda limitadas. Definiremos agora uma métrica em $\mathcal{B}(X;\mathbb{R})$ pondo, para $f, g \in \mathcal{B}(X;\mathbb{R})$ arbitrárias,

$$d(f,g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|.$$

Deixamos ao leitor o cuidado de verificar as condições que fazem de d uma métrica. Esta é a chamada *métrica da convergência uniforme*, ou *métrica do sup*. A explicação para o primeiro nome virá no Capítulo 5.

Seja $X = [a, b]$. Dadas $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ limitadas, a distância $d(f, g)$ é o comprimento da maior corda vertical que se pode traçar ligando o gráfico de f ao gráfico de g. Assim, por exemplo, no espaço métrico $\mathcal{B}([0, 1]; R)$, a distância da função $f(x) = x$ à função $g(x) = x^2$ é $d(f, g) = 1/4$.

No caso em que $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, toda função $f\colon X \to \mathbb{R}$ é limitada e se identifica a uma lista $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, onde $x_1 = f(1)$, $x_2 = f(2), \ldots, x_n = f(n)$. Assim, para $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, temos $\mathcal{B}(X; \mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$ e a métrica do sup reduz-se à métrica d'', introduzida no Exemplo 4.

Exemplo 6. *Espaços vetoriais normados.* Seja E um espaço vetorial real. Uma *norma* em E é uma função real $|\ |\colon E \to \mathbb{R}$, que associa a cada vetor $x \in E$ o número real $|x|$, chamado a *norma de* x, de modo a serem cumpridas as condições abaixo para quaisquer $x, y \in E$ e λ escalar:

N1) Se $x \neq 0$ então $|x| \neq 0$;
N2) $|\lambda \cdot x| = |\lambda| \cdot |x|$;
N3) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

No postulado N2), o símbolo $|\lambda|$ indica o valor absoluto do número λ, enquanto que $|x|$ significa a norma do vetor x. N2) implica (quando se põe $\lambda = 0$ e $x = 0$) que $|0| = 0$ e, tomando $\lambda = -1$, que $|-x| = |x|$ para todo $x \in E$. Por sua vez, fazendo $y = -x$ em N3), obtemos

$$0 = |x + (-x)| \leq |x| + |-x| = 2|x|,$$

donde $|x| \geq 0$ para todo $x \in E$. Segue-se que $|x| > 0$ se, e somente se, $x \neq 0$.

Um *espaço vetorial normado* é um par $(E, |\ |)$ onde E é um espaço vetorial real e $|\ |$ é uma norma em E. Freqüentemente se designa o espaço vetorial normado com E, deixando a norma subentendida.

Exemplos de espaço vetorial normado são $(\mathbb{R}^n, |\ |)$, $(\mathbb{R}^n, |\ |')$ e $(\mathbb{R}^n, |\ |'')$, onde, para $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, se tem

$$|x| = \sqrt{\Sigma\,(x_i)^2}, \quad |x|' = \Sigma |x_i| \text{ e } |x|'' = \max |x_i|.$$

Os postulados que caracterizam uma norma são de verificação imediata, salvo N3) para a primeira destas normas. Ele será verificado no Exemplo 7, logo a seguir.

Outro exemplo de espaço vetorial normado é $\mathcal{B}(X; \mathbb{R})$, onde pomos $||f|| = \sup_{x \in X} |f(x)|$. Aqui empregamos o símbolo $||f||$ para designar a norma da função f, a fim de não confundir com a função $|f|\colon X \to \mathbb{R}$, tal que $|f|(x) = |f(x)|$, a qual se chama a "função valor absoluto de f".

Todo espaço vetorial normado $(E, |\ |)$ torna-se um espaço métrico por meio da definição $d(x, y) = |x - y|$. Esta métrica diz-se *proveniente da norma* $|\ |$. Por exemplo, as métricas d, d' e d'' em $\mathbb{R}^n$ são provenientes das normas $|\ |$, $|\ |'$ e $|\ |''$ respectivamente. Também a métrica do sup em $\mathcal{B}(X; \mathbb{R})$ é proveniente da norma que acabamos de introduzir neste espaço. Podemos então escrever $||f - g||$ em vez de $d(f, g)$.

As propriedades d1) a d4) para uma métrica que provém de uma norma resultam imediatamente das análogas para a norma. Por exemplo, a desigualdade triangular se prova assim:

$$d(x,z) = |x-z| = |(x-y)+(y-z)| \leq |x-y| + |y-z| = d(x,y) + d(y,z).$$

Note-se que, num espaço vetorial normado, se tem $|x| = d(x, 0)$, isto é, a norma de um vetor x é a distância de x à origem.

Exemplo 7. *Espaços vetoriais com produto interno.* Seja E um espaço vetorial real. Um *produto interno* em E é uma função $\langle\,,\,\rangle\colon E \times E \to \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado de vetores $x, y \in E$ um número real $\langle x, y\rangle$, chamado o produto interno de

x por y, de modo a serem cumpridas as condições abaixo, para $x, x', y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrários:

P1) $\langle x + x', y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x', y\rangle$;
P2) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda \cdot \langle x, y\rangle$;
P3) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$;
P4) $x \neq 0 \Rightarrow \langle x, x\rangle > 0$.

As três primeiras propriedades implicam

$$\langle x, y + y'\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, y'\rangle, \langle x, \lambda y\rangle = \lambda \cdot \langle x, y\rangle \text{ e } \langle 0, y\rangle = 0.$$

A partir do produto interno, define-se a norma de um vetor $x \in E$ pondo $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, ou seja, $|x|^2 = \langle x, x\rangle$. As propriedadess N1) e N2) são imediatas. Quanto a N3), ela decorre da

Desigualdade de Cauchy-Schwarz: $|\langle x, y\rangle| \leq |x| \cdot |y|$.

Para demonstrar esta desigualdade, note que ela é óbvia quando $x = 0$; para $x \neq 0$, ponha $\lambda = \langle x, y\rangle/|x|^2$ e verifique que o vetor $z = y - \lambda \cdot x$ é perpendicular a x, isto é, $\langle z, x\rangle = 0$. Tomando o produto interno de $y = z + \lambda \cdot x$ por si mesmo, obtemos então $|y|^2 = |z|^2 + \lambda^2 \cdot |x|^2$, donde $\lambda^2|x|^2 \leq |y|^2$. Ora, $\lambda^2|x|^2 = \langle x, y\rangle^2/|x|^2$. Logo $\langle x, y\rangle^2 \leq |x|^2 \cdot |y|^2$, o que nos fornece a desigualdade buscada.

Podemos agora provar que, num espaço com produto interno, pondo $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ e $|y| = \sqrt{\langle y, y\rangle}$, vale $|x + y| \leq |x| + |y|$. Com efeito, temos:

$$\begin{aligned} |x + y|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = |x|^2 + |y|^2 + 2\langle x, y\rangle \leq \\ \leq |x|^2 + |y|^2 + 2|x| \cdot |y| = (|x| + |y|)^2. \end{aligned}$$

O exemplo mais natural de espaço vetorial com produto interno é $\mathbb{R}^n$, com $\langle x, y\rangle = x_1 \cdot y_1 + \cdots + x_n \cdot y_n$. As propriedades P1) a P4) são óbvias. A norma $|x| = \sqrt{\Sigma(x_i)^2}$, introduzida no Exemplo 6, provém deste produto interno. Em particular, fica verificada a condição $|x + y| \leq |x| + |y|$ que faltava no Exemplo 6, bem como a desigualdade triangular para a métrica d do Exemplo 4.

Nem toda norma num espaço vetorial E provém de um produto interno. Quando isto ocorre, vale a chamada *lei do paralelogramo*: $|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2)$, que decorre imediatamente da definição $|x|^2 = \langle x, x\rangle$. Assim, por exemplo, a norma $|x|' = \Sigma|x_i|$ em $\mathbb{R}^n$ não provém de um produto interno porque ela não

cumpre a lei do paralelogramo. (Tome $x = (1,0)$ e $y = (0,1)$.) A título de informação, avisamos que a lei do paralelogramo também é condição suficiente para que uma norma seja proveniente de um produto interno. Este fato é interessante mas sua demonstração é enfadonha.

Exemplo 8. *Produto cartesiano de espaços métricos.* Sejam M e N espaços métricos, cujas métricas indicaremos com o mesmo símbolo d. O produto cartesiano $M \times N$ é, como conjunto, formado pelos pares ordenados $z = (x, y)$, onde $x \in M$ e $y \in N$. Podemos dotar o produto $M \times N$ de uma métrica, definindo a distância de $z = (x, y)$ a $z' = (x', y')$ como sendo

$$d'(z, z') = d(x, x') + d(y, y'),$$

ou

$$d''(z, z') = \max\{d(x, x'), d(y, y')\},$$

ou então

$$d(z, z') = \sqrt{d(x, x')^2 + d(y, y')^2}.$$

Veremos adiante (Cap.2) que essas três métricas são "topologicamente equivalentes". As duas primeiras são muito mais simples para trabalhar do que a terceira, a qual é mencionada apenas para incluir o caso euclidiano. (Se M e N são espaços métricos arbitrários, não há vantagem alguma em trabalhar com d, em vez de d' ou d''.) Novamente aqui observamos que, no futuro, faremos menção a qualquer dessas três métricas chamando-a de d.

A generalização para um produto de n fatores é imediata. Dados os espaços métricos $M_1, M_2, \ldots, M_n$, cujas métricas indicaremos com o mesmo símbolo d, o produto cartesiano $M = M_1 \times \cdots \times M_n$ é o conjunto das listas $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, onde $x_1 \in M_1, \ldots, x_n \in M_n$. Tornaremos M um espaço métrico munindo-o com uma qualquer das três métricas abaixo:

$$d''(x, y) = \max\{d(x_1, y_1), \ldots, d(x_n, y_n)\},$$
$$d'(x, y) = d(x_1, y_1) + \cdots + d(x_n, y_n),$$
$$d(x, y) = \sqrt{d(x_1, y_1)^2 + \cdots + d(x_n, y_n)^2}.$$

Para quaisquer $x, y \in M$, valem as desigualdades:

$$d''(x, y) \leq d(x, y) \leq d'(x, y) \leq n \cdot d''(x, y).$$

A partir daí será demonstrado, no Capítulo 2, que estas três métricas são "topologicamente equivalentes". (Noção a ser definida naquela oportunidade.) Por motivos evidentes, é preferível trabalhar com as métricas d' e d'', às quais poderemos chamar de d mais adiante.

Quando $M_1 = \cdots = M_n = \mathbb{R}$, reobtemos o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, como produto cartesiano de n cópias do espaço métrico $\mathbb{R}$.

2 Bolas e esferas

A noção de bola é fundamental no estudo dos espaços métricos.

Seja a um ponto no espaço métrico M. Dado um número real $r > 0$, definimos:

A *bola aberta* de centro a e raio r é o conjunto $B(a;r)$ dos pontos de M cuja distância ao ponto a é menor do que r. Ou seja,

$$B(a;r) = \{x \in M; d(x,a) < r\}.$$

A *bola fechada* de centro a e raio r é o conjunto $B[a;r]$, formado pelos pontos de M que estão a uma distância menor do que ou igual a r do ponto a. Ou seja

$$B[a;r] = \{x \in M; d(x,a) \leq r\}.$$

A *esfera* de centro a e raio r é o conjunto $S(a;r)$, formado pelos pontos $x \in M$ tais que $d(x,a) = r$. Assim:

$$S(a;r) = \{x \in M; d(x,a) = r\}.$$

Evidentemente, $B[a.r] = B(a;r) \cup S(a;r)$, reunião disjunta.

Quando a métrica d provém de uma norma no espaço vetorial E, podemos escrever:

$$B(a;r) = \{x \in E; |x-a| < r\}, \;\; B[a;r] = \{x \in E; |x-a| \leq r\}$$
$$S(a;r) = \{x \in E; |x-a| = r\}.$$

Seja X um subespaço do espaço métrico M. Para cada $a \in X$ e cada $r > 0$, seja $B_X(a;r)$ a bola aberta de centro a e raio r, relativamente à métrica induzida em X. Tem-se $B_X(a;r) =$

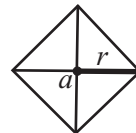
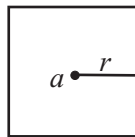
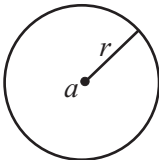
$B(a;r) \cap X$, onde $B(a;r)$ é a bola aberta de centro a e raio r no espaço M. Analogamente, valem $B_X[a;r] = B[a;r] \cap X$ e $S_X(a;r) = S(a;r) \cap X$. Estes fatos resultam imediatamente das definições.

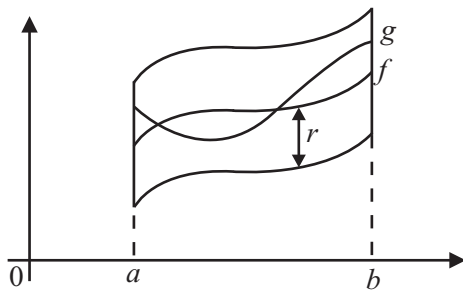
Assim, por exemplo, no círculo unitário $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$, uma bola de centro a é um arco de círculo cujo ponto médio é a.

A noção de esfera tem importância menor do que a de bola. A terminologia acima é motivada por $\mathbb{R}^3$ com a distância euclidiana. Embora seja conveniente lembrar o exemplo de $\mathbb{R}^3$ como modelo geométrico para as situações abstratas que surgirão mais adiante, é bom notar, desde logo, que bolas e esferas às vezes adquirem aspectos inesperados. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 9. Se M está munido da métrica zero-um (Exemplo 1) então, para todo $a \in M$, tem-se $B(a;r) = B[a;r] = M$ se $r > 1$ e $B(a;r) = B[a;r] = \{a\}$ se $r < 1$. Por outro lado $B(a;1) = \{a\}$ e $B[a;1] = M$. Conseqüentemente, $S(a;r) = \varnothing$ se $r \neq 1$, enquanto $S(a;1) = M - \{a\}$.

Exemplo 10. Com a métrica usual da reta, para todo $a \in \mathbb{R}$ e todo $r > 0$, a bola aberta de centro a e raio r é o intervalo aberto $(a-r, a+r)$, pois a condição $|x-a| < r$ equivale a $-r < x-a < r$, ou seja: $a - r < x < a + r$. Analogamente, $B[a;r]$ é o intervalo fechado $[a-r, a+r]$ e a "esfera" $S(a;r)$ tem apenas dois pontos: $a-r$ e $a+r$.

Exemplo 11. No plano $\mathbb{R}^2$, a bola aberta $B(a;r)$ é o interior de um círculo de centro a e raio r, ou o interior de um quadrado de centro a e lados de comprimento $2r$, paralelos aos eixos, ou então o interior de um quadrado de centro a e diagonais paralelas aos eixos, ambas de comprimento $2r$. Estes casos correspondem a usarmos em $\mathbb{R}^2$ as métricas d, d'' ou d' respectivamente. A esfera $S(a;r)$ é o bordo da figura correspondente e $B[a;r]$, evidentemente, é igual a $B(a;r) \cup S(a;r)$.

$(x-a_1)^2+(y-a_2)^2<r^2$. $|x-a_1|<r$ e $|y-a_2|<r$. $|x-a_1|+|y-a_2|<r$.

Exemplo 12. Seja $f \in \mathcal{B}([a,b];\mathbb{R})$. Na métrica do sup (vide Exemplo 5), a condição para que uma função limitada $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ pertença à bola fechada $B[f;r]$ é que seja $|f(x) - g(x)| \leq r$ para todo $x \in [a,b]$. Para interpretar este fato geometricamente consideremos o gráfico de f, isto é, o subconjunto $G(f)$ do plano $\mathbb{R}^2$, formado pelos pontos $(x, f(x))$, onde $x \in [a,b]$. Chamaremos *faixa de amplitude* $2r$ em torno de $G(f)$ ao conjunto dos pontos (x,y) tais que $x \in [a,b]$ e $f(x) - r \leq y \leq f(x) + r$. As funções $g \in B[f;r]$ são aquelas cujos gráficos estão contidos na faixa de amplitude $2r$ em torno do gráfico de f. Quanto à bola aberta, é claro que se $g \in B(f;r)$ então o gráfico de g está contido na "faixa aberta", formada pelos pontos (x,y) tais que $x \in [a,b]$ e $f(x) - r < y < f(x) + r$. Mas pode ocorrer que o gráfico de g esteja nesta faixa e, apesar disto, seja $\sup\limits_{x\in[a,b]} |g(x) - f(x)| = r$, e portanto $g \notin B(f;r)$. Basta tomar, por exemplo, $f(x) = 0$ para todo $x \in [a,b]$ enquanto $g(x) = x$ se $x \in [a,b)$, e $g(b) = 0$. (Estamos supondo $0 < a < b$., para simplificar.) Neste caso, $||g-f|| = b$ mas, como $|g(x)| < b$ para todo $x \in [a,b]$, vemos que o gráfico de g está contido na faixa aberta de amplitude $2b$ em torno do gráfico de f (que é o segmento $[a,b]$ do eixo das abcissas).

Exemplo 13. Seja $M = \{z \in \mathbb{R}^2; |z| \leq 1\}$ o disco de centro 0 e raio 1, com a métrica induzida pela métrica euclidiana do plano. No espaço métrico M, temos $B(0;r) = B[0;r] = M$ se $r > 1$ e portanto $S(a;r) = \varnothing$ para todo $r > 1$.

Exemplo 14. No produto cartesiano $M = M_1 \times \cdots \times M_n$, tomemos a métrica $d(x,y) = \max\limits_{1\leq i\leq n} d(x_i, y_i)$. Então as bolas em M são pro-

dutos cartesianos de bolas nos fatores M_i :

$$B(a;r) = B(a_1;r) \times \cdots \times B(a_n;r) \text{ e}$$
$$B[a,r] = B[a_1;r] \times \cdots \times B[a_n;r],$$

onde $a = (a_1, \ldots, a_n)$. Com efeito, dizer que $d(a,x) < r$ (ou $d(a,x) \leq r$) equivale a afirmar que $d(a_i, x_i) < r$ (ou $d(a_i, x_i) \leq r$) para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Assim, por exemplo, tomando em $\mathbb{R}^2$ a métrica

$$d[(x,y),(x',y')] = \max\{d(x,x'), d(y,y')\},$$

a bola fechada de centro (a,b) e raio r é o quadrado $[a-r, a+r] \times [b-r, b+r]$. Em $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, a métrica análoga faz com que as bolas sejam cubos com arestas paralelas aos eixos. Já se pensamos em $\mathbb{R}^3$ como o produto $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, onde $\mathbb{R}^2$ tem a métrica euclidiana e tomarmos em $\mathbb{R}^3$ a distância $d[(w,t),(w',t')] = \max\{d(w,w'), d(t,t')\}$, as bolas correspondentes serão cilindros de base circular e altura paralela ao eixo vertical.

Seja M um espaço métrico. Um ponto $a \in M$ chama-se um *ponto isolado* de M quando ele é uma bola aberta em M, ou seja, quando existe $r > 0$ tal que $B(a;r) = \{a\}$. Isto significa, evidentemente, que, além do próprio a, não existem outros pontos de M a uma distância de a inferior a r.

Dizer que um ponto $a \in M$ não é isolado significa, portanto, afirmar que para todo $r > 0$ pode-se encontrar um ponto $x \in A$ tal que $0 < d(a,x) < r$.

Exemplo 15. Seja $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ o conjunto dos números inteiros com a métrica induzida pela métrica usual da reta. Todo ponto $n \in \mathbb{Z}$ é isolado pois, tomando $r = 1$, vemos que se $x \in \mathbb{Z}$ é tal que $x \in B(n;1)$ então $|x - n| < 1$ e portanto $x = n$. Por outro lado, seja $\overline{P} = \{0, 1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots\}$, ainda com a métrica $d(x,y) = |x - y|$. O ponto 0 não é isolado em $\overline{P}$. Com efeito, dado qualquer $r > 0$, existe um número natural n tal que $n > 1/r$. Então $0 < 1/n < r$ e portanto $1/n$ é um ponto da bola $B(0;r)$, diferente do seu centro 0. Mas todo ponto $1/n$ é isolado em $\overline{P}$. Com efeito, o ponto de $\overline{P}$ mais próximo de $1/n$ é $1/(n+1)$, cuja distância a $1/n$ é $1/n(n+1)$. Então, no espaço $\overline{P}$, se tomarmos $0 < r < 1/n(n+1)$, a bola aberta $B(1/n;r)$ contém apenas o seu centro $1/n$. Em particular, no subespaço $P = \{1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots\}$, todo ponto é isolado.

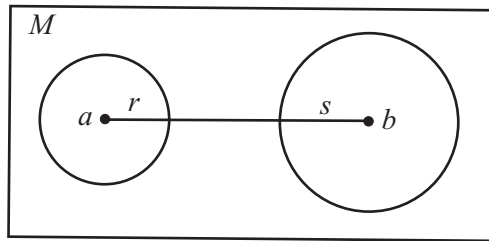
Exemplo 16. Seja E um espaço vetorial normado diferente de $\{0\}$. Nenhum ponto de E é isolado. Com efeito, dados $a \in E$ e $r > 0$, mostramos que a bola aberta $B(a;r)$ contém um elemento $x \neq a$ do seguinte modo: tomando algum $y \neq 0$ em E, vemos que o vetor $z = \dfrac{r}{2|y|} \cdot y$ é $\neq 0$ e tem norma $r/2$; portanto $0 < |z| < r$. Então $x = a + z$ é tal que $0 < |x - a| < r$, como queríamos mostrar.

Um espaço métrico M chama-se *discreto* quando todo ponto de M é isolado. Por exemplo, um espaço com a métrica zero-um é discreto. No Exemplo 15, $\mathbb{Z}$ e $P = \overline{P} - \{0\}$ são discretos. Um subconjunto $X \subset M$ chama-se *discreto* quando o subespaço X (métrica induzida) é discreto. Isto significa que, para cada $x \in X$ existe uma bola aberta $B(x,r)$ tal que $X \cap B(x,r) = \{x\}$.

Proposição 2. *Dados os pontos $a \neq b$ num espaço métrico M, sejam $r > 0$ e $s > 0$ tais que $r + s \leq d(a,b)$. Então as bolas abertas $B(a;r)$ e $B(b;s)$ são disjuntas.*

Demonstração: Se existisse algum ponto $x \in B(a;r) \cap B(b;s)$, teríamos $d(a;x) < r$ e $d(b;x) < s$. Daí

$$d(a,b) \leq d(a,x) + d(x,b) < r + s \leq d(a,b),$$

um absurdo.

Corolário. *Se $r + s < d(a,b)$ então as bolas fechadas $B[a;r]$ e $B[b;s]$ são disjuntas.*

Se fosse $d(a,x) \leq r$ e $d(b,x) \leq s$, teríamos $d(a,b) \leq d(a,x) + d(x,b) \leq r + s < d(a,b)$. Outro modo: tome r' e s' tais que $r < r'$, $s < s'$ e $r + s < r' + s' < d(a,b)$. Então as bolas fechadas $B[a;r]$ e $B[b;s]$ estão contidas nas bolas abertas disjuntas $B(a;r')$ e $B(b;s')$ respectivamente.

3 Conjuntos limitados

Um subconjunto X de um espaço métrico M chama-se *limitado* quando existe uma constante $c > 0$ tal que $d(x, y) \leq c$ para quaisquer $x, y \in X$. O menor desses números c será chamado o diâmetro de X. Ora, dizer que $x, y \in X \Rightarrow d(x, y) \leq c$ significa afirmar que c é uma cota superior para o conjuntos das distâncias $d(x, y)$ entre pontos de X. A menor das cotas superiores de um conjunto de números reais chama-se o supremo desse conjunto. Logo, podemos definir o *diâmetro* de um conjunto limitado $X \subset M$ como o número real

$$\operatorname{diam}(X) = \sup\{d(x, y); x, y \in X\}.$$

Às vezes, para indicar que X não é limitado, escreve-se $\operatorname{diam}(X) = \infty$. Isto significa que, dado arbitrariamente um número real c, podem-se obter pontos $x_c, y_c \in X$ tais que $d(x_c, y_c) > c$. É evidente que se X é limitado e $Y \subset X$ então também Y é limitado, valendo $\operatorname{diam}(Y) \leq \operatorname{diam}(X)$.

Ao fazer considerações sobre o diâmetro de um conjunto X, convém supor que $X \neq \varnothing$. Isto será admitido implicitamente.

Exemplo 17. Toda bola $B(a; r)$ é um conjunto limitado e seu diâmetro não excede $2r$. Com efeito, dados $x, y \in B(a; r)$ temos $d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) < r + r = 2r$. O mesmo se aplica à bola fechada $B[a; r]$ e, conseqüentemente, à esfera $S(a; r)$. Pode ocorrer que o diâmetro de $B[a; r]$ (e portanto da bola aberta e da esfera) seja menor do que $2r$. Basta considerar M reduzido a um único ponto a. Então $B[a; r] = \{a\}$, tem diâmetro 0 para todo $r > 0$. Um exemplo menos dramático é dado pelo espaço $\mathbb{Z}$ (métrica induzida de $\mathbb{R}$). Se $r > 0$ não é inteiro então, para cada $a \in \mathbb{Z}$, o diâmetro de $B[a; r] = [a - r, a + r] \cap \mathbb{Z}$ é menor do que $2r$.

Exemplo 18. Num espaço vetorial normado $E \neq \{0\}$, toda bola aberta $B = B(a; r)$ tem diâmetro $2r$. De fato, já sabemos que $\operatorname{diam}(B) \leq 2r$. Basta então mostrar que nenhum número positivo s, menor do que $2r$, pode ser o diâmetro de B. Tomemos $y \neq 0$ em E e um número real t tal que $s < 2t < 2r$. O vetor $x = ty/|y|$ tem norma t (menor do que r), logo $a + x$ e $a - x$ pertencem a B. Além disso, $d(a + x, a - x) = |(a + x) - (a - x)| = 2|x| = 2t > s$, logo s não é o diâmetro de B, como afirmáramos.

Exemplo 19. Alguns espaços métricos são limitados. Basta considerar (mesmo num espaço métrico ilimitado) um subconjunto limitado, com a métrica induzida. Um espaço vetorial normado $E \neq \{0\}$, com a métrica proveniente de sua norma, nunca é limitado. Com efeito, dado $x \neq 0$ em E, para cada $c > 0$ podemos tomar em E o vetor $x_c = 2cx/|x|$, o qual tem norma $2c$ (maior do que c) e portanto $d(x_c, 0) = |x_c| > c$.

Um subconjunto X de um espaço métrico M é limitado se, e somente se, está contido em alguma bola de M. Com efeito, se $X \subset B(a; r)$ então X é limitado e tem diâmetro $\leq 2r$. Reciprocamente, se X é limitado então X está contido em qualquer bola se for vazio e, se não for, tomando arbitrariamente $a \in X$, existe $c > 0$ tal que $d(a, x) \leq c$ para todo $x \in X$. Logo $X \subset B[a; c] \subset B(a; 2c)$.

Exemplo 20. Se X e Y são limitados então $X \cup Y$ é limitado. Com efeito, fixemos um ponto $a \in X$ e um ponto $b \in Y$. (O resultado é óbvio se $X = \varnothing$ ou $Y = \varnothing$.) Existe $c > 0$ tal que $d(x, a) \leq c$ e $d(y, b) \leq c$ para todo $x \in X$ e todo $y \in Y$. Então, pondo $k = 2c + d(a, b)$, temos, para $x \in X$ e $y \in Y$ arbitrários: $d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, b) + d(b, y) \leq c + d(a, b) + c = k$. A desigualdade $d(x, y) \leq k$ é evidente quando $x, y \in X$ ou $x, y \in Y$. Logo vale $d(x, y) \leq k$ para x e y quaisquer em $X \cup Y$, o que mostra que a reunião $X \cup Y$ é um conjunto limitado. Aplicando este resultado $n - 1$ vezes, concluímos que a reunião $X_1 \cup \cdots \cup X_n$ de n conjuntos limitados é um conjunto limitado. Em particular, todo conjunto finito (sendo reunião dos seus pontos) é limitado.

Uma aplicação $f\colon X \to M$, definida num conjunto arbitrário X e tomando valores num espaço métrico M, chama-se *limitada* quando sua imagem $f(X)$ é um subconjunto limitado de M.

Exemplo 21. A função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 1/(1+x^2)$, é limitada porque $f(\mathbb{R}) = (0, 1]$. Por outro lado, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $g(x) = x^2$, não é limitada pois $g(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$. Se $d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma métrica que provém de uma norma em $\mathbb{R}^n$, então d não é uma função limitada, conforme o Exemplo 19.

Generalizando o Exemplo 5, sejam X um conjunto arbitrário e M um espaço métrico. Indiquemos com a notação $\mathcal{B}(X; M)$ o conjunto das funções limitadas $f\colon X \to M$.

Dadas $f, g \in \mathcal{B}(X; M)$, as distâncias $d(f(x), g(x))$, quando x

varia em X, formam um conjunto limitado de números reais ≥ 0, pois o conjunto $f(X) \cup g(X) \subset M$ é limitado (vide Exemplo 20). Assim, podemos definir a distância entre duas funções limitadas $f, g \colon X \to M$ pondo:

$$d(f,g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)).$$

Obtemos então uma métrica em $\mathcal{B}(X; M)$, a qual denominamos *métrica da convergência uniforme*, ou *métrica do sup*.

Quando E é um espaço vetorial normado, podemos somar funções que tomam valores em E e multiplicá-las por números. É fácil verificar que, para quaisquer $f, g \in \mathcal{B}(X; E)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, as funções $f + g \colon X \to E$ e $\lambda \cdot f \colon X \to E$ são limitadas. Portanto $\mathcal{B}(X; E)$ é um espaço vetorial em relação às operações naturais. A métrica do sup em $\mathcal{B}(X; E)$ provém da norma $||f|| = \sup_{x \in X} |f(x)|$. Neste caso, podemos então escrever $||f - g||$ em vez de $d(f, g)$.

Seria natural considerar o conjunto $\mathcal{F}(X; M)$ de *todas* as funções $f \colon X \to M$, definidas no conjunto arbitrário X e tomando valores no espaço métrico M. A métrica do sup não tem sentido em $\mathcal{F}(X; M)$ porque há funções $f, g \colon X \to M$ tais que o conjunto $\{d(f(x), g(x)); x \in X\}$ não é limitado. Neste caso, escrevemos $d(f, g) = +\infty$. Quando este conjunto for limitado, escrevemos $d(f, g) < +\infty$. Por exemplo, sejam $f, g, h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $f(x) = x$, $g(x) = x + \operatorname{sen} x$ e $h(x) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Temos $d(f, g) < +\infty$ e $d(f, h) = d(g, h) = +\infty$. Note-se que f, g e h são ilimitadas.

A relação "$d(f, g) < +\infty$" é reflexiva: $d(f, f) < +\infty$. Ela também é simétrica: se $d(f, g) < +\infty$ então $d(g, f) < +\infty$. É transitiva: se $d(f, g) < +\infty$ e $d(g, h) < +\infty$ então, para todo $x \in X$, temos $d(f(x), h(x)) \leq d(f(x), g(x)) + d(g(x), h(x)) \leq d(f, g) + d(g, h)$, logo $d(f, h) < +\infty$. Assim, "$d(f, g) < +\infty$" é uma relação de equivalência no conjunto $\mathcal{F}(X; M)$.

Dada $f \colon X \to M$, a classe de equivalência de f segundo a relação "$d(f, g) < +\infty$" é o conjunto

$$\mathcal{B}_f(X; M) = \{g \colon X \to M;\ d(g, f) < +\infty\},$$

formado pelas funções que estão a uma distância finita de f. Dadas $f, g \colon X \to M$, tem-se $d(f, g) < +\infty \Leftrightarrow g \in \mathcal{B}_f(X; M) \Leftrightarrow f \in \mathcal{B}_g(X; M) \Leftrightarrow \mathcal{B}_f(X; M) = \mathcal{B}_g(X; M)$.

Assim, podemos definir em cada conjunto $\mathcal{B}_f(X;M)$ uma estrutura de espaço métrico, pondo $d(g,h) = \sup_{x\in X} d(g(x),h(x))$, para g, h quaisquer em $\mathcal{B}_f(X;M)$. A transitividade da relação "$d(f,g) < +\infty$" assegura que $d(g,h)$ é um número real.

É claro que $\mathcal{F}(X;M) = \bigcup_f \mathcal{B}_f(X;M)$, onde f varia em $\mathcal{F}(X;M)$. Se escolhermos, em cada classe $\mathcal{B}_f(X;M)$, uma única função $\alpha\colon X \to M$ para representante da classe e chamarmos de A o conjunto das representantes, podemos escrever

$$\mathcal{F}(X;M) = \bigcup_{\alpha\in A} \mathcal{B}_\alpha(X;M)$$

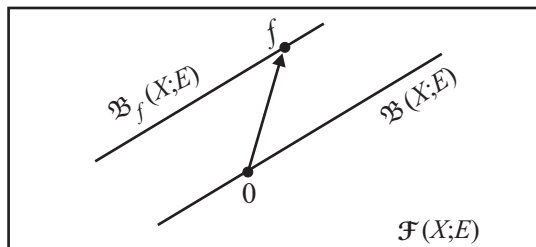
onde, agora, $\alpha \neq \beta \Rightarrow \mathcal{B}_\alpha(X;M) \cap \mathcal{B}_\beta(X;M) = \varnothing$. Isto exprime $\mathcal{F}(X;M)$ como reunião de espaços métricos dois a dois disjuntos.

Observemos que $\mathcal{B}(X;M) = \mathcal{B}_a(X;M)$, onde $a\colon X \to M$ é qualquer constante; com efeito, uma aplicação $f\colon X \to M$ é limitada se, e somente se, sua imagem $f(X)$ está contida numa bola $B(a;r) \subset M$. Isto significa que $d(f(x),a) < r$ para todo $x \in X$ e portanto $f \in \mathcal{B}_a(X;M)$.

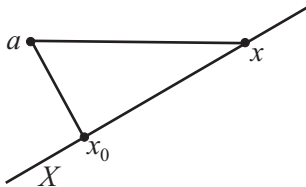
No caso de o espaço métrico M ser limitado, tem-se evidentemente $\mathcal{F}(X;M) = \mathcal{B}(X;M)$. Só há uma classe $\mathcal{B}_f(X;M)$.

Seja agora E um espaço vetorial normado. Então $\mathcal{F}(X;E)$ é um espaço vetorial, do qual $\mathcal{B}(X;E)$ é um subespaço, dotado da norma do sup. Para cada $f \in \mathcal{F}(X;E)$, tem-se $g \in \mathcal{B}_f(X;E)$ se, e somente se, a função $h = g-f$ é limitada. Assim $g \in \mathcal{B}_f(X;E) \Leftrightarrow g = f+h$, $h \in \mathcal{B}(X;E)$. Em outras palavras,

$$\mathcal{B}_f(X;E) = f + \mathcal{B}(X;E) \overset{\text{def}}{=} \{f+h; h \in \mathcal{B}(X;E)\}.$$

Vemos, pois, que, no espaço vetorial $\mathcal{F}(X;E)$, o conjunto $\mathcal{B}_f(X;E)$ é a variedade afim paralela ao subespaço $\mathcal{B}(X;E)$ e contendo o vetor f.

O espaço vetorial $\mathcal{F}(X; E) = \bigcup_{\alpha} \mathcal{B}_\alpha(X; E)$ não é normado mas é reunião disjunta de variedades afins, cada uma das quais é um espaço métrico, com a métrica do sup. Uma dessas variedades, $\mathcal{B}(X; E)$, é um espaço vetorial normado.

4 Distância de um ponto a um conjunto; distância entre dois conjuntos

Sejam a um ponto e X uma reta no plano. O ponto $x_0 \in X$, pé da perpendicular baixada de a sobre X, é o ponto de X que está mais próximo de a. Com efeito, qualquer outro ponto $x \in X$ determina o triângulo retângulo $a\,x_0\,x$ e, pelo Teorema de Pitágoras, temos $d(a, x)^2 = d(a, x_0)^2 + d(x_0, x)^2$, donde $d(a, x_0) \leq d(a, x)$.

Assim, podemos escrever

$$d(a, x_0) = \inf_{x \in X} d(a, x).$$

Vamos agora generalizar esta situação.

Sejam a um ponto e X um subconjunto não-vazio de um espaço métrico M. Definiremos a *distância do ponto a ao conjunto X* como o número real

$$d(a, X) = \inf_{x \in X} d(a, x).$$

O conjunto de números reais não-negativos $\{d(a, x); x \in X\}$, formado pelas distâncias de a aos diversos pontos de X, é não-vazio e limitado inferiormente por zero. Se esse conjunto possuir um elemento mínimo, ele será a distância $d(a, X)$. Mas pode não existir um elemento $x_0 \in X$ mais próximo de a do que os outros pontos de X. (Situações desse tipo serão vistas nos exemplos abaixo.) A noção de ínfimo de um conjunto de números reais existe

precisamente para generalizar a idéia de elemento mínimo. Pela definição de ínfimo, temos:

1) $d(a, X) \leq d(a, x)$ para todo $x \in X$;
2) Se $d(a, X) < c$ então existe $x \in X$ tal que $d(a, x) < c$.

A propriedade 1) diz que o número $d(a, x)$ é uma cota inferior para o conjunto das distâncias de a aos pontos de X. A propriedade 2) diz que nenhum número maior do que $d(a, X)$ é cota inferior desse conjunto. Equivalentemente: $d(a, X)$ é a maior das cotas inferiores do conjunto $\{d(a, x); x \in X\}$. Logo, podemos reformular a propriedade 2) escrevendo:

2') Se $c \leq d(a, x)$ para todo $x \in X$, então $c \leq d(a, X)$.

As propriedades 1) e 2) (ou 2')) acima caracterizam a distância $d(a, X)$. Assim, quando tivermos de provar que um certo número m é igual a $d(a, X)$, deveremos mostrar primeiro que $m \leq d(a, x)$ para todo $x \in X$ e, em seguida, que se $m < c$ então existe algum $x \in X$ tal que $d(a, x) < c$.

Evidentemente, $a \in X \Rightarrow d(a, X) = 0$ e $X \subset Y \Rightarrow d(a, Y) \leq d(a, X)$.

Notemos ainda que $d(a, X) = 0 \Leftrightarrow$ para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in X$ com $d(a, x) < \varepsilon$.

Exemplo 22. Se $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ é um conjunto finito, então $d(a, X)$ é o menor dos n números $d(a, x_1), \ldots, d(a, x_n)$.

Exemplo 23. Sejam $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$ o círculo unitário do plano e $0 \in \mathbb{R}^2$ a origem. Então $d(0, z) = 1$ para todo $z \in S^1$, logo $d(0, S^1) = 1$.

Exemplo 24. Para todo intervalo aberto $X = (a, b)$ na reta, tem-se $d(a, X) = d(b, X) = 0$. Dado um disco aberto $X = B(a; r)$ no plano $\mathbb{R}^2$, tem-se $d(b, X) = 0$ para todo ponto b da circunferência $S(a, r)$. Estes fatos seguem-se do resultado mais geral seguinte.

Num espaço vetorial normado E, seja $B = B(a, r)$ a bola aberta de centro $a \in E$ e raio $r > 0$. Dado $b \in E$, tem-se $d(b, B) = 0$ se, e somente se, $b \in B[a; r]$. Demonstremos isto. Primeiro, suponhamos $b \in B[a; r]$, ou seja, $|b - a| \leq r$. Se for $|b - a| < r$ então $b \in B$, donde $d(b, B) = 0$. Se for $|b - a| = r$, então, dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, obteremos um ponto $x \in B$ tal que $d(b, x) < \varepsilon$. Começamos chamando de $u = (b - a)/r$ o vetor unitário do raio ab. Em seguida,

tomamos um número real t, tal que $r-\varepsilon < t < r$. Temos, portanto $0 < r-t < \varepsilon$. Em seguida, pomos $x = a + t \cdot u$. Então é imediato que $d(x,a) = |x-a| = t < r$, logo $x \in B$. Além disso, $d(x,b) = |b-x| = |b-a-t\cdot u| = |r\cdot u - t\cdot u| = r-t < \varepsilon$. Isto conclui a prova de que $x \in B[a;r] \Rightarrow d(x,B) = 0$, onde $B = B(a,r)$.

Para demonstrar a recíproca, tomemos em E um ponto $p \notin B[a;r]$ e provemos que $d(p,B) > 0$. Temos $|p-a| = r+c$, com $c > 0$. Para todo $x \in B$, vale $|x-a| < r$ e, como $|p-a| \leq |p-x|+|x-a|$, concluímos que $d(p,x) = |p-x| \geq |p-a|-|x-a| \geq c$. Segue-se que $d(p,B) \geq c > 0$. Este exemplo mostra, em particular, que se pode ter $d(a,X) = 0$ com $a \notin X$.

Proposição 3. *Seja M um espaço métrico. Dados $a, b \in M$ e um subconjunto não-vazio $X \subset M$, vale:*

$$|d(a,X) - d(b,X)| \leq d(a,b).$$

Demonstração. Devemos mostrar que $-d(a,b) \leq d(a,X) - d(b,X) \leq d(a,b)$. Ora, para todo $x \in X$, temos: $d(a,X) \leq d(a,x) \leq d(a,b) + d(b,x)$, ou seja: $d(a,X) - d(a,b) \leq d(b,x)$. Esta desigualdade valendo para todo $x \in X$, concluímos que $d(a,X) - d(a,b) \leq d(b,X)$, ou, o que é o mesmo: $d(a,X) - d(b,X) \leq d(a,b)$. Esta é uma das duas desigualdades que devíamos demonstrar. A outra decorre daí, trocando-se a por b.

Corolário. *Dados a, b, x em M, tem-se $|d(a,x)-d(b,x)| \leq d(a,b)$.*

Pode-se também definir, mais geralmente a *distância entre dois subconjuntos* não-vazios $X, Y \subset M$. Põe-se

$$d(X,Y) = \inf\{d(x,y); x \in X, y \in Y\}.$$

Quando $X \cap Y \neq \varnothing$, tem-se $d(X,Y) = 0$ mas a recíproca é falsa, como se vê na reta, tomando $X = (-\infty, 0)$ e $Y = (0, +\infty)$. Tem-se $X \cap Y = \varnothing$ mas $d(X,Y) = 0$.

É claro que $d(X,X) = 0$ e que $d(X,Y) = d(Y,X)$ mas estas são as únicas propriedades da distância entre pontos que permanecem válidas para conjuntos.

5 Isometrias

Sejam M, N espaços métricos. Uma aplicação $f\colon M \to N$ chama-se uma *imersão isométrica* quando $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ para quaisquer $x, y \in M$. Neste caso, diz-se também que f preserva distâncias.

Uma imersão isométrica $f\colon M \to N$ é sempre injetora pois $f(x) = f(y) \Rightarrow d(x, y) = d(f(x), f(y)) = 0 \Rightarrow x = y$. Uma *isometria* é uma imersão isométrica sobrejetiva. Toda imersão isométrica $f\colon M \to N$ define uma isometria de M sobre o subespaço $f(M) \subset N$.

A composta de duas isometrias e a inversa de uma isometria são ainda isometrias.

Sejam X um conjunto, (M, d) um espaço métrico e $f\colon X \to M$ uma aplicação injetiva. Para cada par de pontos $x, y \in X$, ponhamos $d'(x, y) = d(f(x), f(y))$. Isto define uma métrica d' em X, chamada a *métrica induzida* por f. Ela é a única métrica em X que torna $f\colon X \to M$ uma imersão isométrica. Um exemplo particular desta situação é o caso de um subconjunto $X \subset M$. A métrica que torna X um subespaço de M é induzida pela aplicação de inclusão $i\colon X \to M$, tal que $i(x) = x$ para todo $x \in X$.

Um dos métodos mais freqüentes de introduzir uma métrica num conjunto X é induzi-la através de uma aplicação injetiva $f\colon X \to M$, de X num espaço métrico M.

Exemplo 25. Seja $\mathbb{R}^n$ com a métrica induzida por uma norma qualquer. Tomemos $a, u \in \mathbb{R}^n$, com $|u| = 1$. A aplicação $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, definida por $f(t) = a + t \cdot u$, é uma imersão isométrica da reta em $\mathbb{R}^n$. Com efeito, para $s, t \in \mathbb{R}$ arbitrários, temos $d(f(s), f(t)) = |f(s) - f(t)| = |(t - s) \cdot u| = |t - s| = d(s, t)$. Fixado $a \in \mathbb{R}^n$, a aplicação $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, dada por $g(x) = x + a$, é uma isometria (cuja inversa é $y \mapsto y - a$), chamada *translação* pelo vetor a. Também $h(x) = -x$ define uma isometria $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. As translações mostram que, dados $a, b \in \mathbb{R}^n$ quaisquer, existe uma isometria $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $f(a) = b$. Este fato se exprime dizendo que $\mathbb{R}^n$ é "metricamente homogêneo". Um exemplo de espaço que não tem essa propriedade é um intervalo fechado $[a, b]$. Para toda isometria $f\colon [a, b] \to [a, b]$ deve-se ter $|f(b) - f(a)| = |b - a|$. Como $f(b)$ e $f(a)$ pertencem a $[a, b]$, tem-se necessaria-

mente $f(a) = a$, $f(b) = b$ ou então $f(a) = b$ e $f(b) = a$. Em todas as afirmações deste exemplo, o espaço $\mathbb{R}^n$ pode ser substituído por um espaço vetorial normado E qualquer.

Exemplo 26. Concebendo $\mathbb{R}^2$ como o conjunto dos números complexos (métrica euclidiana), fixemos um elemento $u = a + ib$, com $|u|^2 = a^2+b^2 = 1$. A aplicação $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $f(z) = u \cdot z$ (multiplicação de números complexos) é uma isometria. Com efeito, $|f(z) - f(w)| = |u \cdot z - u \cdot w| = |u| \cdot |z - w| = |z - w|$, logo f preserva distâncias. Além disso, f é uma bijeção, cuja inversa é $w \mapsto u^{-1} \cdot w$, onde $u^{-1} = a - bi$ é o inverso multiplicativo do número complexo u, de valor absoluto um.

Exemplo 27. Mostraremos agora que todo espaço métrico $M = (M, d)$ pode ser imerso isometricamente no espaço vetorial normado $E = \mathcal{B}(M; \mathbb{R})$. Suponhamos inicialmente que M seja limitado. Então definiremos uma aplicação $\varphi\colon M \to \mathcal{B}(M; \mathbb{R})$ pondo, para cada $x \in M$, $\varphi(x) = d_x$, onde $d_x\colon M \to \mathbb{R}$ é a função "distância ao ponto x", isto é, $d_x(y) = d(x, y)$ para todo $y \in M$. Como a métrica d é limitada, cada função d_x, $x \in M$, é limitada, de modo que φ toma realmente valores em $\mathcal{B}(M; \mathbb{R})$. Para provar que φ preserva distâncias, notemos que, pela Proposição 3, dados $x, x', y \in M$ arbitrários, temos $|d_x(y) - d_{x'}(y)| \leq d(x, x')$. Logo

$$||d_x - d_{x'}|| = \sup_{y \in M} |d_x(y) - d_{x'}(y)| \leq d(x, x').$$

Por outro lado, tomando $y = x'$, obtemos $|d_x(y) - d_{x'}(y)| = d(x, x')$. Segue-se que $||d_x - d_{x'}|| = d(x, x')$, ou seja, $d(\varphi(x), \varphi(x')) = d(x, x')$. Portanto φ é uma imersão isométrica de M em $\mathcal{B}(M; \mathbb{R})$. Quando M não é limitado, nenhuma das funções d_x é limitada. Neste caso, fixamos um ponto $a \in M$ e definimos a aplicação $\xi\colon M \to \mathcal{B}(M; \mathbb{R})$ pondo $\xi(x) = d_x - d_a$. Para cada $x \in M$, como vimos acima, vale $||\xi(x)|| = ||d_x - d_a|| \leq d(a, x)$, logo $\xi(x)$ é uma função limitada, ou seja, ξ toma mesmo valores em $\mathcal{B}(M; \mathbb{R})$. Além disso, $d(\xi(x), \xi(x')) = ||\xi(x) - \xi(x')|| = ||(d_x - d_a) - (d_{x'} - d_a)|| = ||d_x - d_{x'}|| = d(x, x')$ como ficou provado acima. Por conseguinte, ξ é uma imersão isométrica de M no espaço vetorial normado $\mathcal{B}(M; \mathbb{R})$.

Observação: Mesmo quando M não é limitado, a aplicação $\varphi\colon M \to \mathcal{F}(M; \mathbb{R})$ pode ser definida por $\varphi(x) = d_x$, e a desigualdade $||d_x - d_{x'}|| \leq d(x, x')$ mostra que para x e x' arbitrários em

M, as funções d_x e $d_{x'}$ estão sempre a uma distância finita uma da outra. Ou seja, existe $f\colon M \to \mathbb{R}$ tal que $d_x \in \mathcal{B}_f(M;\mathbb{R})$ para todo $x \in M$. Temos então uma imersão isométrica $\varphi\colon M \to \mathcal{B}_f(M;\mathbb{R})$. Por um lado, φ é esteticamente preferível à imersão isométrica ξ do Exemplo 27 porque não depende da escolha arbitrária do ponto $a \in M$. Por outro lado, ξ toma valores num espaço vetorial normado, o que não ocorre com φ. Note-se que podemos tomar $f = d_a$ e que $g \mapsto g - d_a$ define uma isometria entre $\mathcal{B}_f(M;\mathbb{R})$ e $\mathcal{B}(M;\mathbb{R})$. Vemos que ξ é a composta desta isometria com φ.

Nosso objetivo neste livro é estudar a Topologia dos Espaços Métricos. Se estivéssemos interessados primordialmente na Geometria desses espaços, as noções de imersão isométrica e isometria desenpenhariam um papel central. Tais noções são demasiadamente rígidas para os nossos propósitos. Embora elas tenham uma certa importância, a noção principal será a de função contínua, que introduziremos no capítulo seguinte.

6 Pseudo-métricas

Uma *pseudo-métrica* num conjunto M é uma função real $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$ que cumpre as condições de uma métrica, salvo o fato de que pode ser $d(x,y) = 0$ com $x \neq y$. Mais precisamente, tem-se $d(x,x) = 0$, $d(x,y) \geq 0$, $d(x,y) = d(y,x)$ e $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$. Um *espaço pseudo-métrico* é um par (M,d) onde M é um conjunto e d é uma pseudo-métrica em M.

Analogamente, uma *pseudo-norma* num espaço vetorial E é uma função $|\ |\colon E \to \mathbb{R}$ tal que $|x| \geq 0$, $|\lambda \cdot x| = |\lambda| \cdot |x|$ e $|x+y| \leq |x| + |y|$. Uma pseudo-norma define uma pseudo-métrica em E pondo-se $d(x,y) = |x - y|$.

Exemplo 28. Qualquer conjunto X pode receber uma pseudo-métrica trivial pondo-se $d(x,y) = 0$ para $x, y \in X$ quaisquer. Mais geralmente, se (M,d) é um espaço pseudo-métrico e $f\colon X \to M$ é qualquer aplicação, obtém-se em X a *pseudo-métrica f' induzida* por f pondo-se $d'(x,y) = d(f(x), f(y))$. (O caso anterior corresponde a f constante.) Uma maneira bastante comum de obter pseudo-métricas é a seguinte: seja $\mathcal{F}$ um conjunto de funções reais $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que todas as $f \in \mathcal{F}$ são limitadas no mesmo sub-

conjunto $S \subset \mathbb{R}$. (Isto quer dizer que cada restrição $f|S$ é limitada.) Então $d(f,g) = \sup_{x\in S} |f(x)-g(x)|$ define uma pseudo-métrica em $\mathcal{F}$. Na realidade, tal pseudo-métrica provém da pseudo-norma $||f-g|| = \sup_{x\in S} |f(x)-g(x)|$. Isto não é necessariamente uma norma porque pode-se ter $f(x) = 0$ para todo $x \in S$ sem que f se anule em todos os pontos de $\mathbb{R}$. Este exemplo pode ser generalizado considerando-se funções $f\colon X \to M$ e um subconjunto $S \subset X$ onde as f são limitadas.

Exemplo 29. Outra pseudo-norma ocorre no espaço E das funções $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ que são integráveis no sentido de Riemann, quando se define $|f|_1 = \int_a^b |f(x)|\,dx$. Como as funções aqui não precisam ser contínuas, pode ocorrer que $|f|_1 = 0$ sem que f se anule em todos os pontos de $[a,b]$. (Basta, por exemplo, que $f(x) \neq 0$ apenas num número finito de pontos.)

Pode-se passar de um espaço pseudo-métrico M para um espaço métrico $\overline{M}$, mediante o processo de identificar dois pontos $x, y \in M$ quando $d(x,y) = 0$.

Mais precisamente, a relação "$d(x,y) = 0$" é um equivalência em M. Indicamos com $\overline{x} = \{y \in M; d(x,y) = 0\}$ a classe de equivalência do ponto $x \in M$ e chamamos de $\overline{M}$ o conjunto de todas as classes de equivalência $\overline{x}$, quando x percorre M. Temos $\overline{x} = \overline{u} \Leftrightarrow d(x,u) = 0$. Dados $\overline{x}, \overline{y} \in \overline{M}$, definimos $\overline{d}(\overline{x},\overline{y}) = d(x,y)$. Se $\overline{x} = \overline{u}$ e $\overline{y} = \overline{v}$ então $d(x,y) \leq d(x,u) + d(u,v) + d(v,y) = d(u,v)$ e, da mesma maneira, $d(u,v) \leq d(x,y)$. Logo $d(x,y) = d(u,v)$. Isto mostra que a definição $\overline{d}(\overline{x},\overline{y}) = d(x,y)$ não é ambígua. Verifica-se facilmente que $\overline{d}$ é uma métrica em $\overline{M}$.

EXERCÍCIOS DO CAPÍTULO 1

§1

1. Seja $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$ uma função tal que a) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$; b) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(z,y)$. Prove que d é uma métrica.

2. Mostre que $d\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $d(x,y) = (x-y)^2$, não é uma métrica.

3. Para cada uma das quatro condições que caracterizam uma métrica, obtenha uma função $d\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que não a cumpre mas satisfaz as

outras três.

4. Seja $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$ uma métrica. Verifique que $\alpha(x,y) = \sqrt{d(x,y)}$, $\beta(x,y) = d(x,y)/[1 + d(x,y)]$ e $\gamma(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}$ são métricas em M.

5. Prove que toda norma $|| \ ||$ em $\mathbb{R}$ é da forma $||x|| = a \cdot |x|$, onde $a > 0$ é uma constante e $|x|$ é o valor absoluto de x. Conclua que toda norma em $\mathbb{R}$ provém de um produto interno.

6. A fim de que uma métrica d, num espaço vetorial E, seja proveniente de uma norma, é necessário e suficiente que, para $x, a \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrários, se tenha $d(x+a, y+a) = d(x,y)$ e $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x,y)$.

7. Mostre que se X tem mais de um elemento então a norma $||f|| = \sup_{x \in X} |f(x)|$ não provém de um produto interno em $\mathcal{B}(X;\mathbb{R})$. Conclua o mesmo para a norma $|x|'' = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$ em $\mathbb{R}^n$.

8. Seja $X \subset \mathbb{R}^2$ tal que a métrica euclidana induz em X a métrica zero-um. Prove que X tem no máximo três elementos. E se fosse $X \subset \mathbb{R}^3$? Generalize para $\mathbb{R}^n$. Você pode imaginar um espaço vetorial normado E e um subconjunto infinito $X \subset E$ tal que $x \neq y$ em X implique $d(x,y) = 1$?

9. Seja E um espaço vetorial munido de produto interno. Dados $x, y \in E$, prove que $|\langle x, y \rangle| = |x| \cdot |y|$ se, e somente se, x e y são linearmente dependentes.

10. Num espaço vetorial normado E, se $c - a = t \cdot (b - a)$, com $t \geq 1$, então $d(a,c) = d(a,b) + d(b,c)$. (A primeira igualdade significa que b pertence ao segmento de reta cujos extremos são a e c.) No plano, com a norma $|(x,y)| = |x| + |y|$, tome $a = (0,1)$, $b = (0,0)$ e $c = (1,0)$ para mostrar que a recíproca não é verdadeira em qualquer espaço vetorial normado.

11. Sejam a, b, c três pontos distintos num espaço vetorial E, munido de produto interno. Se $d(a,c) = d(a,b) + d(b,c)$ então $c - a = t \cdot (b - a)$, com $t \geq 1$.

§2

12. Em todo espaço métrico M, tem-se

$$B[a;r] = \bigcap_{s>r} B(a;s) = \bigcap_{n=1}^{\infty} B\left(a; r + \frac{1}{n}\right)$$

e

$$\{a\} = \bigcap_{r>0} B(a;r) = \bigcap_{n=1}^{\infty} B\left(a; \frac{1}{n}\right) \cdot$$

Exprima, dualmente, cada bola aberta de M como reunião de bolas fechadas.

13. Um ponto $a = (a_1, \ldots, a_n)$ é isolado no produto cartesiano $M = M_1 \times \cdots \times M_n$ se, e somente se, cada coordenada a_i é um ponto isolado em M_i. Conclua que o produto cartesiano $M_1 \times \cdots \times M_n$ é discreto se, e somente se, cada fator M_i é discreto.

14. Todo espaço métrico finito é discreto.

15. Seja X um conjunto infinito enumerável. Mostre que se pode definir uma métrica em X, relativamente à qual nenhum ponto de X é isolado.

16. Dê exemplo de dois subconjuntos discretos $X, Y \subset \mathbb{R}$ tais que $X \cup Y$ não seja discreto.

17. Se $b \notin B[a;r]$, prove que existe $s > 0$ tal que $B[a;r] \cap B[b;s] = \varnothing$.

18. Num espaço métrico M, seja $b \in B(a;r)$. Prove que existe uma bola aberta de centro b contida em $B(a;r)$. Dê um contra-exemplo mostrando que isto poderia ser falso para $b \in B[a;r]$.

19. Seja M um espaço métrico. A *diagonal* $\Delta \subset M \times M$ é o conjunto dos pares $(x,x) \in M \times M$ com coordenadas iguais. Prove que se $z \in M \times M - \Delta$ então existe uma bola aberta de centro z em $M \times M$ que é disjunta de Δ. (Fica mais fácil usando a métrica $d(z,z') = \max\{d(x,x'), d(y,y')\}$.)

20. Usando a métrica $d[(x,y),(x',y')] = \max\{d(x,x'), d(y,y')\}$, mostre que a esfera de centro (a,b) e raio r em $M \times N$ é igual a $(B[a;r] \times S(b;r)) \cup (S(a;r) \times B[b;r])$.

21. Seja $X \subset M$ um subconjunto discreto. Obtenha, para cada $x \in S$, uma bola aberta $B_x = B(x;r_x)$ em M, de tal modo que $x \neq y \Rightarrow B_x \cap B_y = \varnothing$.

22. Dados um subconjunto X de um espaço métrico M e um número real $r > 0$, seja $B(X;r) = \bigcup_{x \in X} B(x;r)$ a "bola aberta de centro X e raio r". Prove que $B(X \cap Y;r) \subset B(X;r) \cap B(Y;r)$ e que $B(X \cup Y;r) = B(X;r) \cup B(Y;r)$.

§3

23. Dê exemplo de um conjunto limitado $X \subset \mathbb{R}$ tal que não existam $x, y \in X$ com $|x - y| = \operatorname{diam}(X)$.

24. Seja M um espaço métrico limitado. Mostre que, para cada $a \in M$ existe uma bola $B[a;r]$ cujo diâmetro é menor do que $2r$.

25. Seja $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n (a_n \neq 0)$ um polinômio de grau $n > 0$. Mostre que a função $p \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não é limitada mas para cada subconjunto limitado $X \subset \mathbb{R}$, a restrição $p|X$ é limitada.

26. Todo espaço métrico é reunião enumerável de subconjuntos limitados.

§4

27. Sejam a um ponto e C um subconjunto não-vazio de um espaço métrico. Suponha que $d(a,C)=2$ e prove que existe uma bola aberta $B(a;r)$ tal que $d(x,C)>1$ para todo $x\in B(a;r)$.

28. Seja $\Delta=\{(x,x);x\in M\}$ a diagonal do produto $M\times M$, onde M é um espaço métrico. Se $z=(x,y)\notin\Delta$ então $d(z,\Delta)>0$.

29. Seja $F=M-B(a;r)$ o complementar de uma bola aberta no espaço métrico M. Se $d(x,F)=0$ então $x\in F$.

30. Seja $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;x^2+y^2<1\}$ o disco unitário aberto do plano euclidiano $\mathbb{R}^2$. Dado $a=(5,0)$, prove que $d(a,X)=4$.

31. Num espaço vetorial normado E, sejam $X=B(a;r)$ e $\overline{X}=B[a;r]$. Prove que, para todo $b\in E$, tem-se $d(b,X)=d(b,\overline{X})$.

32. Seja $X=\{x\in\mathbb{R}^n;x_{p+1}=\cdots=x_n=0\}$. Usando em $\mathbb{R}^n$ a métrica euclidiana, prove que se $a=(a_1,\ldots,a_n)$ então $d(a,X)=$ $=\sqrt{(a_{p+1})^2+\cdots+(a_n)^2}$.

33. Para todo subconjunto não-vazio A de um espaço métrico M, seja $A_*=\{x\in M;d(x,A)=0\}$. Prove que $(A_*)_*=A_*$.

34. Prove que se tem $d(a,X)=\inf\{r>0;a\in B(X;r)\}$. (Vide Exercício 22.)

35. Sejam A, B subconjuntos limitados não-vazios de um espaço métrico M. Mostre que $\operatorname{diam}(A\cup B)\le\operatorname{diam}(A)+\operatorname{diam}(B)+d(A,B)$.

36. Dê exemplo de conjuntos não-vazios A, B tais que $A\cap B=\varnothing$ e $d(A,B)=0$.

37. Sejam X,Y limitados e não-vazios no espaço métrico M. Ponha $\alpha(X,Y)=\sup\{d(x,y);x\in X,y\in Y\}$ e mostre que, para todo $z\in M$ tem-se $|d(z,X)-d(z,Y)|\le\alpha(X,Y)$.

§5

38. Num espaço vetorial normado E, duas bolas abertas (fechadas) de mesmo raio são isométrricas. Mais precisamente, existe uma isometria de E que leva uma dessas bolas na outra. Mostre que para espaços métricos em geral, este resultado é falso.

39. Seja T o subespaço do plano formado por dois segmentos de reta unitários: um horizontal, I, e outro vertical, J, cuja origem é o ponto médio de I. Existe uma isometria $f\colon I\to J$ mas nenhuma isometria $g\colon T\to T$ leva I em J. (Na realidade, há somente duas isometrias $g\colon T\to T$. Determine-as.)

40. Seja E um espaço vetorial com produto interno. Toda imersão isométrica $f\colon\mathbb{R}\to E$ tem a forma $f(t)=a+t\cdot u$, onde $a,u\in E$, sendo $|u|=1$.

41. Considerando em $\mathbb{R}^2$ a norma $|(x,y)| = |x| + |y|$, obtenha uma imersão isométrica $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ cuja imagem é o ângulo reto que tem como lados os semi-eixos coordenados positivos. Conclua que o exercício anterior não vale para espaços vetoriais normados em geral.

42. Dada uma imersão isométrica $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mostre que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x + a$ para todo $x \in \mathbb{R}$, ou $f(x) = -x + a$ para todo x. Em particular, f é uma isometria.

43. Seja $X \subset \mathbb{R}$. Toda imersão isométrica $f\colon X \to \mathbb{R}$ se estende (de modo único, se X tem mais de um elemento) a uma imersão $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Em particular, $f(x) = \pm x + a$, para todo $x \in X$.

44. Admita o seguinte resultado da Teoria dos Conjuntos: se X é um conjunto infinito e $\mathbb{Q}$ é o conjunto dos racionais, então existe uma bijeção $f\colon X \to X \times \mathbb{Q}$. Conclua daí que se pode introduzir em todo conjunto infinito uma métrica sem pontos isolados. (Vide Exercício 15.)

45. Seja E um espaço vetorial com produto interno. Dada uma transformação linear $T\colon E \to E$, as seguintes afirmações são equivalentes: a) T é uma imersão isométrica; b) $|T \cdot x| = |x|$ para todo $x \in E$; c) $\langle T \cdot x, T \cdot y\rangle = \langle x, y\rangle$ para quaisquer $x, y \in E$. Se a dimensão de E é finita, nestas condições T é uma isometria.

46. Seja $\mathbb{R}^\infty$ o espaço vetorial formado pelas seqüências $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ com apenas um número finito de termos $x_n \neq 0$. Defina em $\mathbb{R}^\infty$ o produto interno $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n + \ldots$ (Esta soma é finita.) A transformação linear $T\colon \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$, definida por $T \cdot (x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$ é uma imersão isométrica mas não é uma isometria.

47. É dada uma imersão isométrica $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. (As métricas são euclidianas. Não supomos f linear.) Prove que existem $a \in \mathbb{R}^n$ e uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tais que $f(x) = T \cdot x + a$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$. (T necessariamente preserva distâncias.) Em particular, se $m = n$ então f é uma isometria.

48. Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$ não-vazio e $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ uma imersão isométrica. Mostre que existe uma imersão isométrica $\varphi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tal que $\varphi|X = f$. Quando X gera $\mathbb{R}^m$, φ é única.

49. Estabeleça isometrias: a) Entre $\mathcal{B}(X; M \times N)$ e $\mathcal{B}(X; M) \times \mathcal{B}(X; N)$; b) Entre $\mathcal{B}(X \times Y; M)$ e $\mathcal{B}(X; \mathcal{B}(Y; M))$. No item a), escolha a métrica conveniente em cada produto cartesiano.

50. Considere no plano $\mathbb{R}^2$ a norma $|(x,y)| = \max\{|x|, |y|\}$. A projeção $\pi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\pi(x,y) = y$ define, por restrição, uma isometria entre o subespaço $X = \{(t, at); t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}$, se, e somente se, $|a| \geq 1$.

51. Um espaço métrico M chama-se "metricamente homogêneo" quando, dados arbitrariamente $a, b \in M$, existe uma isometria $f\colon M \to M$ tal que $f(a) = b$. Mostre que a esfera unitária $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \langle x, x\rangle = 1\}$ é

metricamente homogênea. Por outro lado, se $B = \{x \in \mathbb{R}^n; \langle x, x\rangle < 1\}$ é a bola aberta unitária do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, toda isometria $g\colon B \to B$ é tal que $g(0) = 0$. Conclua que B não é metricamente homogênea.

52. Dado um espaço métrico M, seja $\Phi(M)$ a coleção dos subconjuntos $X \subset M$ que são limitados, não-vazios e, além disso, cumprem a seguinte condição: $d(a, X) = 0 \Leftrightarrow a \in X$. Dados $X, Y \in \Phi(M)$, seja $\rho(X, Y)$ o maior dos dois números abaixo:

$$\sup_{x \in X} d(x, Y) \qquad \text{e} \qquad \sup_{y \in Y} d(y, X).$$

Prove que ρ define uma métrica em $\Phi(M)$. O número $\rho(X, Y)$ é conhecido como a *distância de Hausdorff* entre os conjuntos X e Y.

53. Dados $X, Y \in \Phi(M)$ e $r > 0$, prove que $\rho(X, Y) < r$ implica $X \subset B(Y; r)$ e $Y \subset B(X; r)$. (Notações dos Exercícios 22, 34 e 52.) Por outro lado, estas inclusões implicam $\rho(X, Y) \leq r$. Conclua que

$$\rho(X, Y) = \inf\{r > 0; X \subset B(Y; r) \text{ e } Y \subset B(X; r)\}.$$

54. Seja $\xi\colon \Phi(M) \to \mathcal{F}(M; \mathbb{R})$ a aplicação que associa a cada $X \subset \Phi(M)$ (Vide Exercício 52) a função $d_X\colon M \to \mathbb{R}$, onde $d_X(y) = d(y, X)$. Mostre que para $X, Y \in \Phi(M)$ arbitrários, as funções d_X e d_Y estão sempre a uma distância finita. Mostre também que ξ é uma imersão isométrica de $\Phi(M)$ no espaço de funções $\mathcal{F}(M; \mathbb{R})$. [Bem entendido, não foi definida uma métrica em todo o espaço $\mathcal{F}(M; \mathbb{R})$ mas ξ toma valores numa parte que foi metrizada.]

55. Seja $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \langle x, x\rangle = 1\}$ a esfera unitária n-dimensional. O *espaço projetivo de dimensão n* é o conjunto P^n cujos elementos são os pares não-ordenados $[x] = \{x - x\}$, onde $x \in S^n$. Note que $[x] = [-x]$. Mais precisamente, $[x] = [y] \Leftrightarrow y = \pm x$. Defina $d([x], [y]) = \min\{|x - y|, |x + y|\}$ e mostre que d é uma métrica em P^n. Mostre que a aplicação natural $\pi\colon S^n \to P^n$, definida por $\pi(x) = [x]$ cumpre a condição $d(\pi(x), \pi(y)) \leq d(x, y)$. Mostre ainda que, se $X \subset S^n$ é tal que $\operatorname{diam}(X) \leq \sqrt{2}$, então a restrição $\pi|X$ é uma imersão isométrica de X em P^n.

56. Dado um subconjunto limitado $S \subset \mathbb{R}$, defina uma função $|\ |_S\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pondo, para cada $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$|a|_S = \sup_{t \in S} |a_1 + a_2 t + \cdots + a_n t^{n-1}|.$$

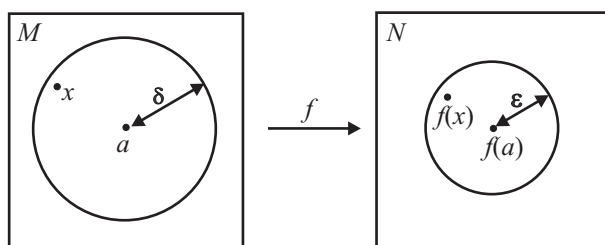
Prove que $|\ |_S$ é uma pseudo-norma em $\mathbb{R}^n$. Que condição deve ser imposta a S para se obter assim uma norma?

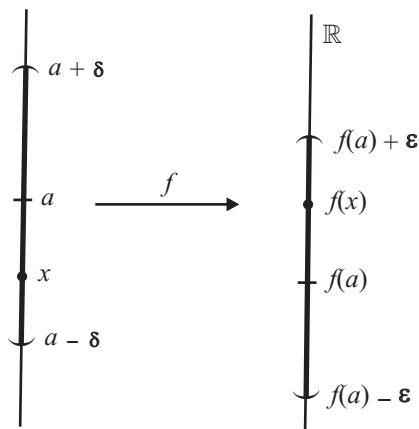
Capítulo 2

Funções Contínuas

1 Definição e exemplos

Definição. Sejam M, N espaços métricos. Diz-se que a aplicação $f\colon M{\to}N$ é *contínua no ponto* $a{\in}M$ quando, para todo $\varepsilon{>}0$ dado, é possível obter $\delta{>}0$ tal que $d(x,a){<}\delta$ implica $d(f(x),f(a)){<}\varepsilon$.

Diz-se que $f\colon M \to N$ é *contínua* quando ela é contínua em todos os pontos $a \in M$.

Equivalentemente, $f\colon M \to N$ é contínua no ponto $a \in M$ quando, dada qualquer bola $B' = B(f(a);\varepsilon)$ de centro $f(a)$, pode-se encontrar uma bola $B = B(a;\delta)$, de centro a, tal que $f(B) \subset B'$.

No importante caso particular em que $M \subset \mathbb{R}$ e $f\colon M \to \mathbb{R}$, dizer que f é contínua no ponto $a \in M$ significa afirmar que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $x \in M$ e $a-\delta < x < a+\delta$ implicam

$f(a)-\varepsilon < f(x) < f(a)+\varepsilon$. Ou seja, f transforma os pontos de M que estão no intervalo aberto $(a-\delta, a+\delta)$ em pontos do intervalo aberto $(f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$.

Observação. A noção de continuidade num ponto é local, isto é, depende apenas do comportamento de f nas proximidades do ponto. Mais precisamente, se existir em M uma bola B, de centro a, tal que $f|B$ seja contínua no ponto a, então $f\colon M \to N$ é contínua no ponto a. Segue-se daí que se, para toda parte limitada $X \subset M$, $f|X$ for contínua, então $f\colon M \to N$ é contínua.

Exemplo 1. Dada $f\colon M \to N$, suponhamos que exista uma constante $c>0$ (chamada *constante de Lipschitz*) tal que $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x,y)$ quaisquer que sejam $x, y \in M$. Dizemos então que f é uma *aplicação lipschitziana*. Neste caso, f é contínua (em cada ponto $a \in M$). Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta = \varepsilon/c$. Então $d(x,a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) \leq c \cdot d(x,a) < c \cdot \delta = \varepsilon$. Se $f, g\colon M \to \mathbb{R}$ são lipschitzianas, o mesmo ocorre com $f+g$ e $k \cdot f$, onde $k \in \mathbb{R}$. Daí, toda combinação linear $k_1 \cdot f_1 + \cdots + k_n \cdot f_n$ de funções reais lipschitzianas é lipschitziana. Para uma função real de variável real f, a condição de Lipschitz significa que $|f(x) - f(y)|/|x-y| \leq c$ e isto equivale a afirmar que a inclinação de qualquer secante ao gráfico de f é, em valor absoluto, $\leq c$. Se uma função real $f\colon I \to \mathbb{R}$, definida num intervalo I, é derivável e $|f'(x)| \leq c$ para todo $x \in I$, então, pelo Teorema do Valor Médio, dados $x, y \in I$ quaisquer, existe um ponto z, entre x e y, tal que $f(x) - f(y) = f'(z)(x-y)$ e daí $|f(x) - f(y)| \leq c \cdot |x-y|$. Assim toda função com derivada limitada num intervalo (o qual pode ser ilimitado) é lipschitziana.

Uma aplicação $f\colon M \to N$ chama-se *localmente lipschitziana* quando cada ponto $a \in M$ é centro de uma bola $B = B(a, r)$ tal que a restrição $f|B$ é lipschitziana. Uma aplicação localmente lipschitziana é, evidentemente, contínua. No exemplo abaixo as aplicações mencionadas são todas localmente lipschitzianas.

Exemplo 2. A função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^n$, (n inteiro positivo) é lipschitziana em cada parte limitada de $\mathbb{R}$ pois $|x| \leq a \Rightarrow |f'(x)| = n|x|^{n-1} \leq n \cdot a^{n-1}$.

Isto também pode ser visto sem derivadas: se $|x| \leq a$ e $|y| \leq a$ então $|x^n - y^n| = |x - y| \cdot |x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + y^{n-1}| \leq |x-y|(|x|^{n-1}+|x|^{n-2}|y|+\cdots+|y|^{n-1}) \leq c\cdot|y-x|$, onde $c = n\cdot a^{n-1}$. Segue-se que um polinômio $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ cumpre a condição de Lipschitz em cada intervalo limitado $[a, b]$. Concluímos, em particular, que todo polinômio $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua. De modo análogo, podemos mostrar que a função $r\colon \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, definida por $r(x) = 1/x$, é contínua. Provamos primeiro que, para cada $k > 0$, r é lipschitziana no conjunto $X_k = \{x \in \mathbb{R}; |x| \geq k\}$. Ora, se $|x| \geq k$ e $|y| \geq k$, então $|r(x) - r(y)| = |1/x - 1/y| = |x - y|/|x \cdot y| \leq c \cdot |x - y|$, onde $c = 1/k^2$. Segue-se daí que cada número real $a \neq 0$ é centro de um intervalo, restrito ao qual r é contínua. Logo r é contínua.

Exemplo 3. *Contrações fracas.* Se $f\colon M \to N$ é tal que $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$ para qualquer $x, y \in M$, dizemos que f é uma *contração fraca.* Neste caso f é lipschitziana (com $c = 1$) e portanto contínua. Vejamos agora várias contrações fracas. Todas são, pois, contínuas:

a) As aplicações constantes $f\colon M \to N$, $f(x) = k \in N$, para todo $x \in M$.

b) As imersões isométricas (em particular as isometrias). Vejamos um tipo: para cada $a \in M$ e cada $b \in N$, obtemos imersões isométricas $i_b\colon M \to M \times N$ e $j_a\colon N \to M \times N$, pondo $i_b(x) = (x, b)$ e $j_a(y) = (a, y)$. Outro exemplo: a inclusão $i\colon X \to M$, de um subespaço $X \subset M$.

c) Para cada $X \subset M$ não-vazio, $d_X\colon M \to \mathbb{R}$, definida por $d_X(y) = d(y, X)$ é uma contração fraca, conforme a Proposição 3, Capítulo 1. Em particular, para cada $x \in X$, a função $d_x\colon M \to \mathbb{R}$, dada por $d_x(y) = d(x, y)$, é uma contração fraca.

d) Num espaço vetorial normado E, a norma $|\ |: E \to \mathbb{R}$ é uma contração fraca pois $|\,|x| - |y|\,| = |d(x,0) - d(y,0)| \leq d(x,y) = |x-y|$.

e) Para cada $i = 1,\dots,n$ a projeção $p_i \colon M_1 \times \cdots \times M_n \to M_i$, definida por $p_i(x_1,\dots,x_n) = x_i$, é uma contração fraca, se tomamos no produto cartesiano qualquer uma das três métricas introduzidas no Capítulo 1.

f) A própria métrica $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$ é uma contração fraca, desde que tomemos em $M\times M$ a métrica $\delta[(x,y),(x',y')]{=}d(x,x')+d(y,y')$. Com efeito, $|d(x,y) - d(x',y')| = |d(x,y) - d(x',y) + d(x',y) - d(x',y')| \leq |d(x,y) - d(x',y)| + |d(x',y) - d(x',y')| \leq d(x,x') + d(y,y') = \delta[(x,y),(x',y')]$. Intuitivamente: quando x se aproxima de a e y se aproxima de b então $d(x,y)$ se aproxima de $d(a,b)$.

g) A operação de soma, $s\colon E\times E \to E$, $s(x,y) = x+y$, num espaço vetorial normado E é uma contração fraca, quando se toma em $E\times E$ a norma $|(x,y)| = |x|+|y|$. Com efeito, $|x+y-(a+b)| \leq |x-a|+|y-b| = |(x,y)-(a,b)|$. Em particular, a soma de números reais e de vetores em $\mathbb{R}^n$.

h) Para todo $a \in X$, seja $v_a\colon \mathcal{B}(X;M) \to M$ definida por $v_a(f) = f(a)$.

Então $d[v_a(f), v_a(g)] = d(f(a), g(a)) \leq \sup\limits_{x\in X} d(f(x),g(x)) = d(f,g)$ e portanto v_a (chamada a "avaliação no ponto a") é uma contração fraca.

Exemplo 4. *Continuidade em espaços discretos.* Se $a \in M$ é um ponto isolado, então toda aplicação $f\colon M \to N$ é contínua no ponto a. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta > 0$ tal que $B(a;\delta) = \{a\}$. Então $d(x,a) < \delta \Rightarrow x = a \Rightarrow d(f(x),f(a)) = 0 < \varepsilon$. Em conseqüência, se M é discreto, toda aplicação $f\colon M \to N$ é contínua. Por outro lado, se N é discreto então $f\colon M \to N$ é contínua se, e somente se, cada ponto $a \in M$ é centro de uma bola aberta na qual f é constante.

Exemplo 5. *Descontinuidade.* Se $f\colon M \to N$ não é contínua no ponto a, diz-se que f é *descontínua* nesse ponto. Isto significa que existe $\varepsilon > 0$ com a seguinte propriedade: para todo $\delta > 0$, pode-se obter $x_\delta \in M$ tal que $d(x_\delta, a) < \delta$ e $d(f(x_\delta), f(a)) \geq \varepsilon$. Uma formulação equivalente, que às vezes é útil, é a seguinte: e-

xiste $\varepsilon > 0$ tal que, para cada $n = 1, 2, \ldots$ pode-se obter $x_n \in M$ com $d(x_n, a) < 1/n$ e $d(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon$. Um exemplo de descontinuidade: $\xi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, função característica do conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais. Tem-se $\xi(x) = 1$ se $x \in \mathbb{Q}$ e $\xi(x) = 0$ no caso contrário. Em todo ponto $a \in \mathbb{R}$, ξ é descontínua. De fato, tomemos $\varepsilon = 1/2$. Dado $\delta > 0$, tomemos x_δ tal que $|x_\delta - a| < \delta$, sendo x_δ racional se a for irracional e vice-versa. Então $|\xi(x_\delta) - \xi(a)| = 1 \geq 1/2$. Note que $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ é reunião de dois conjuntos tais que ξ restrita a cada um deles é contínua, por ser constante.

Isto ilustra a diferença entre as afirmações:

(a) $f|X$ é contínua;

(b) f é contínua em todos os pontos de X.

Estas asserções se referem a uma aplicação $f\colon M \to N$ e um subconjunto $X \subset M$. Tem-se (b) $\Rightarrow$ (a) mas não vale a recíproca.

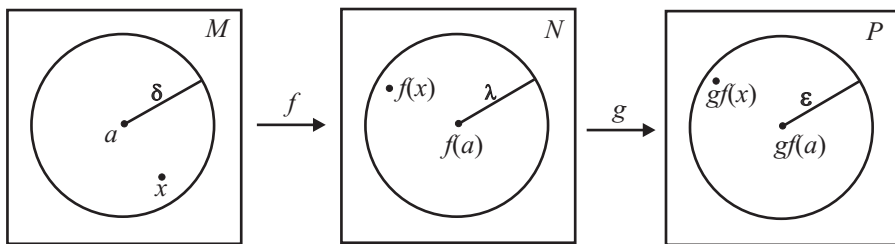
No exemplo que acabamos de ver, $\xi|\mathbb{Q}$ é contínua mas ξ não é contínua em ponto algum de $\mathbb{Q}$. Um exemplo popular de descontinuidade é o da função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. Esta função é descontínua no ponto 0. Com efeito, dado $\varepsilon = 1/2$, podemos tomar, para cada n, $x_n = 2/(2n+1)\pi$. Então $\operatorname{sen}(1/x_n) = \pm 1$. Logo, temos $|x_n - 0| < 1/n$ e $|f(x_n) - f(0)| = 1 \geq \varepsilon$.

Registraremos aqui um fato óbvio, que será usado sem maiores comentários no que se segue. Dada uma aplicação $f\colon M \to N$, seja $N_1 \subset N$ um subespaço tal que $f(x) \in N_1$ para todo $x \in M$. Então f pode também ser considerada como uma aplicação de M em N_1, digamos $f_1\colon M \to N_1$. Então f é contínua se, e somente se, f_1 é contínua.

2 Propriedades elementares das aplicações contínuas

Proposição 1. *A composta de duas aplicações contínuas é contínua. Mais precisamente, se $f\colon M \to N$ é contínua no ponto a e $g\colon N \to P$ é contínua no ponto $f(a)$, então $g \circ f\colon M \to P$ é contínua no ponto a.*

Demonstração: Seja dado $\varepsilon > 0$. A continuidade de g no ponto

$f(a)$ nos permite obter $\lambda > 0$ tal que $y \in N$, $d(y, f(a)) < \lambda \Rightarrow d(g(y), gf(a)) < \varepsilon$. Por sua vez, dado $\lambda > 0$, a continuidade de f no ponto a nos fornece $\delta > 0$ tal que $x \in M$, $d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \lambda \Rightarrow d(gf(x), gf(a)) < \varepsilon$.

Corolário. *Toda restrição de uma aplicação contínua é contínua. Mais exatamente, se* $f\colon M \to N$ *é contínua no ponto* $a \in X \subset M$ *então* $f|X\colon X \to N$ *é contínua no ponto* a.

Com efeito, $f|X = f \circ i$, onde $i\colon X \to M$ é a aplicação de inclusão, $i(x) = x$, $x \in X$.

Exemplo 6. *Continuidade conjunta e separada.* Uma aplicação $f\colon M \times N \to P$ é comumente vista como uma "função de duas variáveis" $f(x, y)$, onde x varia em M e y em N. Sua continuidade no ponto (a, b) pode ser expressa da seguinte maneira: para todo $\varepsilon > 0$ dado, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que $d(x, a) < \delta_1$ e $d(y, b) < \delta_2 \Rightarrow d(f(x, y), f(a, b)) < \varepsilon$. Esta formulação, resultado imediato da definição de continuidade quando se toma em $M \times N$ a métrica $d[(x, y), (a, b)] = \max\{d(x, a), d(y, b)\}$, significa que se pode tomar $f(x, y)$ tão próximo de $f(a, b)$ quanto se deseje, desde que se tome, ao mesmo tempo, x suficientemente próximo de a e y de b. Diz-se então que f é contínua *conjuntamente* nas variáveis x e y.

Em contraposição, diz-se que $f\colon M \times N \to P$ é *contínua em relação à primeira variável* (no ponto (a, b)) quando a aplicação parcial $f_b\colon M \to P$, dada por $f_b(x) = f(x, b)$, é contínua (no ponto $x = a$). Analogamente, diz-se que f é *contínua em relação à segunda variável* (no ponto (a, b)) quando a aplicação parcial $f^a\colon N \to P$, $f^a(y) = f(a, y)$, é contínua (no ponto $y = b$).

Se ambos os casos ocorrem, dizemos que f é *contínua separadamente* em relação a cada uma de suas variáveis. Como (na notação do Exemplo 3.b) $f^a = f \circ i_a$ e $f_b = f \circ j_b$, vemos que a continuidade

de f num ponto implica que ela seja separadamente contínua nesse ponto.

A recíproca é falsa. O exemplo clássico é o da função $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dada por $f(x,y)=xy/(x^2+y^2)$ se $x^2+y^2\neq 0$, e $f(0,0)=0$. Na origem $(0,0)$, f é separadamente contínua pois ambas as funções parciais $f(x,0)$ e $f(0,y)$ são identicamente nulas. Mas f é (conjuntamente) descontínua na origem pois sua restrição à reta $y=ax$ $(a\neq 0)$ nos dá uma função descontínua:

$$f(x,ax)=ax^2/(x^2+a^2x^2)=a/(1+a^2) \text{ se } x\neq 0 \text{ e } f(0,0)=0.$$

A situação dual, em que se tem uma aplicação $f\colon M\to N_1\times N_2$ que toma valores num produto cartesiano, é bem mais simples, como mostraremos na Proposição 2. Antes, porém, vejamos um exemplo de continuidade para uma função de duas variáveis.

Exemplo 7. *Continuidade da multiplicação.* Seja E um espaço vetorial normado. Já vimos (Exemplo 3.g) que a soma s: $E\times E\to E$, $s(x,y)=x+y$, é contínua, pois é uma contração fraca. Agora consideremos a outra operação de E, ou seja, a aplicação $m\colon\mathbb{R}\times E\to E$, onde $m(\lambda,x)=\lambda\cdot x$. Mostremos que m é lipschitziana em cada parte limitada de $\mathbb{R}\times E$. Com efeito, se $|\lambda|$, $|\mu|$, $|x|$, $|y|$ são $\leq a$ então $d[m(\lambda,x),m(\mu,y)]=|\lambda\cdot x-\mu\cdot y|=|\lambda\cdot x-\mu\cdot x+\mu\cdot x-\mu\cdot y|\leq|\lambda-\mu|\cdot|x|+|\mu|\cdot|x-y|\leq a(|\lambda-\mu|+|x-y|)=a\cdot d[(\lambda,x),(\mu,y)]$. Segue-se que m é contínua em cada parte limitada de $\mathbb{R}\times E$ e, por conseguinte, $m\colon\mathbb{R}\times E\to E$ é contínua. (Vide Observação, §1.) Em particular, a multiplicação de números reais, $m\colon\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $m(x,y)=x\cdot y$, é uma função contínua de duas variáveis.

Dados os espaços métricos M, N_1 e N_2, uma aplicação $f\colon M\to N_1\times N_2$ equivale a um par de aplicações $f_1\colon M\to N_1$ e $f_2\colon M\to N_2$, chamadas as *coordenadas* de f, tais que $f(x)=(f_1(x),f_2(x))$ para todo $x\in M$. Escreve-se $f=(f_1,f_2)$. Considerando-se as projeções $p_1\colon N_1\times N_2\to N_1$ e $p_2\colon N_1\times N_2\to N_2$, tem-se $f_1=p_1\circ f$ e $f_2=p_2\circ f$. A proposição seguinte, embora de simples demonstração, é fundamental.

Proposição 2. *A aplicação $f\colon M\to N_1\times N_2$ é contínua (no ponto $a\in M$) se, e somente se, suas coordenadas $f_1\colon M\to N_1$ e $f_2\colon M\to N_2$ são contínuas (no ponto a).*

Demonstração: Se f é contínua então o mesmo ocorre com $f_1 = p_1 \circ f$ e $f_2 = p_2 \circ f$ porque as projeções p_1 e p_2 são contínuas. (Exemplo 3.e.) Para provar a recíproca, usamos em $N_1 \times N_2$ a métrica $d[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = \max\{d(x_1, y_1), d(x_2, y_2)\}$. Dado $\varepsilon > 0$, como f_1 e f_2 são contínuas no ponto a, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que $d(x, a) < \delta_1 \Rightarrow d(f_1(x), f_1(a)) < \varepsilon$ e $d(x, a) < \delta_2 \Rightarrow d(f_2(x), f_2(a)) < \varepsilon$. Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Então $d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) = \max\{d(f_1(x), f_1(a)), d(f_2(x), f_2(a))\} < \varepsilon$. Logo f é contínua no ponto a.

Corolário. *Se $f_1 \colon M_1 \to N_1$ e $f_2 \colon M_2 \to N_2$ são contínuas, então também é contínua a aplicação*

$$\varphi = f_1 \times f_2 \colon M_1 \times M_2 \to N_1 \times N_2 ,$$

definida por

$$\varphi(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2)).$$

Com efeito, considerando as projeções

$$p_1 \colon M_1 \times M_2 \to M_1 \quad \text{e} \quad p_2 \colon M_1 \times M_2 \to M_2 ,$$

vemos que as coordenadas de φ são

$$f_1 \circ p_1 \colon M_1 \times M_2 \to N_1 \quad \text{e} \quad f_2 \circ p_2 \colon M_1 \times M_2 \to N_2 .$$

Segue-se da Proposição 2 que φ é contínua.

Convém guardar a diferença entre as notações

$$f = (f_1, f_2) \colon M \to N_1 \times N_2 \quad \text{e} \quad \varphi = f_1 \times f_2 \colon M_1 \times M_2 \to N_1 \times N_2 .$$

Como aplicação dos fatos elementares sobre continuidade até agora estabelecidos, e como ilustração da técnica de provar a continuidade de uma aplicação exprimindo-a como composta de outras mais simples, temos a

Proposição 3. *Sejam M um espaço métrico, E um espaço vetorial normado e $f, g \colon M \to E$, $\alpha, \beta \colon M \to \mathbb{R}$ aplicações contínuas, com $\beta(x) \neq 0$ para todo $x \in M$. Então são contínuas as aplicações $f + g \colon M \to E$, $\alpha \cdot f \colon M \to E$ e $\alpha/\beta \colon M \to \mathbb{R}$, definidas por*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \; (\alpha \cdot f)(x) = \alpha(x) \cdot f(x),$$
$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)(x) = \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} .$$

Demonstração. Foi visto nos Exemplos 2, 3.g e 7, respectivamente, que as aplicações $r\colon \mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$, $s\colon E\times E\to E$ e $m\colon \mathbb{R}\times E\to E$, dadas por $r(x)=1/x$, $s(x,y)=x+y$ e $m(\lambda,x)=\lambda\cdot x$, são contínuas.

$$\left.\begin{cases} M \overset{(f,g)}{\longrightarrow} E\times E \overset{s}{\longrightarrow} E \\ x\longmapsto (f(x),g(x))\longmapsto f(x)+g(x)\end{cases}\right\} f+g=s\circ(f,g)$$

$$\left.\begin{cases} M \overset{(\alpha,f)}{\longrightarrow} \mathbb{R}\times E \overset{m}{\longrightarrow} E \\ x\longmapsto (\alpha(x),f(x))\longmapsto \alpha(x)\cdot f(x)\end{cases}\right\} \alpha\cdot f=m\circ(\alpha,f)$$

$$\left.\begin{cases} M \overset{(\alpha,\beta)}{\longrightarrow} \mathbb{R}\times(\mathbb{R}-\{0\}) \overset{(\mathrm{id}\times r)}{\longrightarrow} \mathbb{R}\times\mathbb{R} \overset{m}{\longrightarrow} \mathbb{R} \\ x\longmapsto (\alpha(x),\beta(x))\longmapsto \left(\alpha(x),\dfrac{1}{\beta(x)}\right)\mapsto \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}\end{cases}\right\} \frac{\alpha}{\beta}=m\circ(\mathrm{id}\times r)\circ(\alpha,\beta)$$

Os esquemas acima (onde $\mathrm{id}\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é a aplicação identidade) mostram que $f+g$, $\alpha\cdot f$ e α/β são contínuas, em virtude das Proposições 1 e 2.

Corolário. *Se $f,g\colon M\to\mathbb{R}$ são funções contínuas com valores reais, então $f+g$, $f\cdot g$ e (caso $g(x)\neq 0$ para todo $x\in M$) f/g são funções contínuas.*

Seja $\mathcal{C}(M;N)$ o conjunto das aplicações contínuas do espaço métrico M no espaço métrico N. Usaremos o símbolo $\mathcal{C}_0(M;N)$ para indicar o subconjunto de $\mathcal{C}(M;N)$ formado pelas aplicações contínuas *limitadas* de M em N. $\mathcal{C}_0(M;N)$ é um subespaço do espaço métrico $\mathcal{B}(M;N)$, de todas as aplicações limitadas $f\colon M\to N$, no qual a distância é dada por $d(f,g)=\sup\limits_{x\in M} d(f(x),g(x))$. Por outro lado, $\mathcal{C}(M;N)$ não é um espaço métrico mas é a reunião disjunta dos espaços métricos

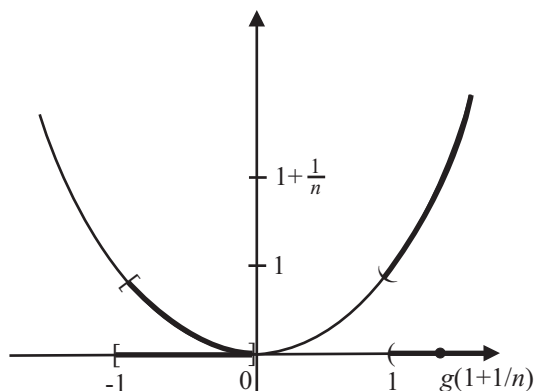
$$\mathcal{C}_f(M;N)=\{g\in\mathcal{C}(M;N);d(f,g)<+\infty\}.$$

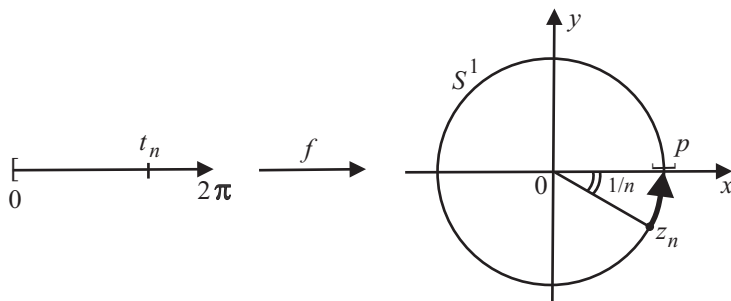
Uma conseqüência da Proposição 3 é que, quando E for um espaço vetorial normado, $\mathcal{C}(M;E)$ será um subespaço vetorial de $\mathcal{F}(M;E)$ e $\mathcal{C}_0(M;E)$ um subespaço vetorial normado de $\mathcal{B}(M;E)$.

3 Homeomorfismos

Ao contrário do que ocorre em Álgebra Linear, onde a inversa de uma transformação linear bijetiva também é linear, ou na Teoria dos Grupos, onde o inverso de um homomorfismo bijetivo é ainda um homomorfismo, em Topologia ocorre o fenômeno de existirem funções contínuas bijetivas $f\colon M \to N$ tais que $f^{-1}\colon N \to M$ é descontínua. Vejamos alguns exemplos desta situação.

Exemplo 8. Seja M a reta com a métrica zero-um. A aplicação identidade $i\colon M \to \mathbb{R}$ é contínua mas sua inversa $j\colon \mathbb{R} \to M$ (que também é dada por $j(x) = x$) é descontínua em cada ponto $a \in \mathbb{R}$. Com efeito, tomando $\varepsilon = 1/2$, temos $B(j(a); 1/2) = \{j(a)\}$ em M. Logo não existe $\delta > 0$ tal que $j((a - \delta, a + \delta)) \subset B(j(a); \varepsilon)$.

Exemplo 9. O exemplo acima é simples mas é artificial: dificilmente pode-se esperar que ocorra um caso como esse durante a solução de um problema de Análise ou de Geometria. Vejamos agora um exemplo menos forçado. Tomamos $M = [-1, 0] \cup (1, \infty)$, $N = [0, +\infty)$ e $f\colon M \to N$ definida por $f(x) = x^2$, para todo $x \in M$. Evidentemente, f é uma bijeção contínua de M sobre $[0, +\infty)$. Sua inversa $g = f^{-1}\colon [0, +\infty) \to M$ é dada por $g(y) = \sqrt{y}$

se $y > 1$ e $g(y) = -\sqrt{y}$ se $0 \le y \le 1$. A função g é descontínua no ponto 1. Com efeito, temos $g(1) = -1$. Se for $0 < \varepsilon < 2$, para cada $n \in \mathbb{N}$ o ponto $1 + 1/n$ dista $1/n$ do ponto 1 mas $g(1 + 1/n) = \sqrt{1 + 1/n}$ é tal que $|g(1 + 1/n) - g(1)| > 2 > \varepsilon$. (O leitor não se deve surpreender com a função contínua f ter seu gráfico formado de dois pedaços. É que seu domínio também tem dois pedaços.)

Exemplo 10. Talvez o exemplo mais instrutivo de como uma bijeção contínua pode ter uma inversa descontínua seja o que daremos agora. Seja $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$ o círculo unitário do plano euclidiano. A função $f\colon [0, 2\pi) \to S^1$ definida por $f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, é contínua, pois suas coordenadas, cos e sen, são contínuas. Além disso, f é bijetiva, como se sabe da Trigonometria. Intuitivamente, f consiste em enrolar o segmento semi-aberto $[0, 2\pi)$ sobre o círculo S^1, sem dobrar nem esticar, de modo que o ponto $t = 0$ caia sobre o ponto $p = (1, 0) \in S^1$. A aplicação inversa, $g = f^{-1}\colon S^1 \to [0, 2\pi)$ é descontínua precisamente nesse ponto p. (Intuitivamente, g consiste em rasgar o círculo no ponto p e desenrolá-lo sobre o segmento.)

Provemos esta afirmação. Temos $g(p) = 0$. Tomamos $\varepsilon = \pi$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, sejam $t_n = 2\pi - 1/n$, $z_n = f(t_n)$. Então a distância de z_n a $p = (1, 0)$ é menor do que $1/n$. (O arco t_n é maior do que a corda.) Mas $g(z_n) = t_n$ é tal que $|g(z_n) - g(p)| = 2\pi - 1/n > \pi = \varepsilon$ para todo n.

Sejam M e N espaços métricos. Um *homeomorfismo* de M sobre N é uma bijeção contínua $f\colon M \to N$ cuja inversa $f^{-1}\colon N \to M$ também é contínua. Neste caso, diz-se que M e N são *homeomorfos*.

Se $f\colon M \to N$ e $g\colon N \to P$ são homeomorfismos então $g \circ f\colon M \to P$ e $f^{-1}\colon N \to M$ também são homeomorfismos.

Às vezes (principalmente na literatura mais antiga) se usa a expressão *equivalência topológica* em vez de "homeomorfismo". Dois espaços métricos homeomorfos são indistinguíveis do ponto de vista da Topologia. Uma propriedade de que goza um espaço M chama-se uma *propriedade topológica* quando todo espaço homeomorfo a M também goza daquela propriedade. As propriedades topológicas

se distinguem das *propriedades métricas* de M, que são preservadas pelas isometrias. Como toda isometria é um homeomorfismo, toda propriedade topológica é métrica, mas não vale a recíproca, como veremos a seguir.

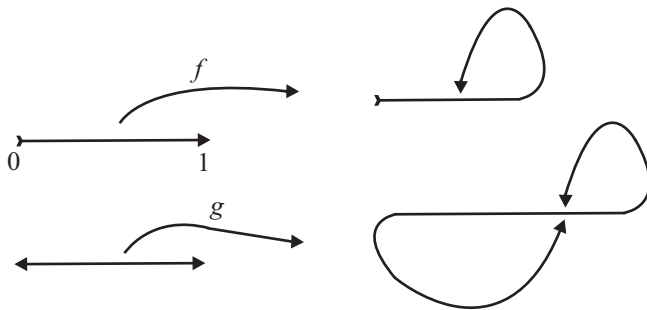
Exemplo 11. Se o espaço métrico N é discreto e $f\colon M \to N$ é um homeomorfismo, então M também é discreto. Com efeito, dado arbitrariamente um ponto $a \in M$, existe uma bola $B(f(a);\varepsilon) = \{f(a)\}$ que se reduz a um ponto. Sendo f contínua, existe $\delta > 0$ tal que $f(B(a;\delta)) \subset B(f(a);\varepsilon) = \{f(a)\}$. Como f é injetiva, a bola $B(a;\delta)$ tem um único elemento, a saber, o ponto a, que é portanto isolado. [Na realidade, provamos que se $f\colon M \to N$ é contínua, injetiva, e $f(a)$ é um ponto isolado em N, então a é isolado em M.] Logo, ser discreto – e portanto não ser discreto – é uma propriedade topológica. Mais ainda: dois espaços discretos M e N são homeomorfos se, e somente se, têm o mesmo número cardinal. Com efeito, toda aplicação definida num espaço discreto sendo contínua, segue-se que qualquer bijeção entre dois espaços discretos é um homeomorfismo. Por outro lado, ser limitado é uma propriedade métrica mas não é uma propriedade topológica. De fato, $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ e $P = \{1, 1/2, \ldots, 1/n. \ldots\}$ (ambos com a métrica induzida da reta) são homeomorfos, por serem ambos discretos, infinitos, enumeráveis. Mas P é limitado e $\mathbb{N}$ não é.

Exemplo 12. *Homeomorfismo entre bolas.* Seja E um espaço vetorial normado. Para todo $a \in E$ e para todo número real $\lambda \neq 0$, a *translação* $t_a\colon E \to E$ e a *homotetia* $m_\lambda\colon E \to E$, definidas por $t_a(x) = x + a$ e $m_\lambda(x) = \lambda \cdot x$, são homeomorfismos de E. De fato, sabemos que t_a e m_λ são contínuas. Além disso, possuem inversas: $(t_a)^{-1} = t_{-a}$ e $(m_\lambda)^{-1} = m_\mu$, $\mu = 1/\lambda$, as quais também são contínuas. Duas bolas abertas $B(a;r)$ e $B(b;s)$ em E são homeomorfas. Mais precisamente, a composta $\varphi = t_b \circ m_{s/r} \circ t_{-a}$ define um homeomorfismo $\varphi\colon E \to E$. Para cada $x \in E$, temos $\varphi(x) = b + s/r(x-a)$. Isto mostra que φ consiste em: 1º) Transladar $B(a;r)$ de modo a pôr seu centro na origem; 2º) Multiplicar todos os vetores por s/r de modo que vetores de comprimento $< r$ passem a ter comprimento $< s$. Isto transforma $B(0;r)$ em $B(0;s)$; 3º) Transladar $B(0;s)$ de modo a pôr seu centro no ponto b. Assim, o homeomorfismo $\varphi\colon E \to E$ é tal que $\varphi(B(a;r)) = B(b;s)$.

Da mesma maneira se mostra que duas bolas fechadas quaisquer em E são homeomorfas. Vemos assim que o diâmetro de um conjunto é um invariante métrico (não muda por isometrias) mas não é um invariante topológico. Convém observar que, num espaço métrico arbitrário, duas bolas abertas podem não ser homeomorfas. O exemplo mais simples é o de um espaço métrico M, que possua um ponto isolado a e um ponto não-isolado b. Existe uma bola $B(a;r) = \{a\}$, a qual não pode ser homeomorfa a uma bola aberta de centro b pois, para todo $s > 0$, $B(b;s)$ é um conjunto infinito.

Exemplo 13. No exemplo anterior, tínhamos dois subespaços X, Y de um espaço métrico M e um homeomorfismo $h\colon M \to M$, tal que $h(X) = Y$. Isto mostra que X e Y são homeomorfos: $h|X$ é um homeomorfismo entre X e Y. E mais ainda: diz que X e Y estão topologicamente situados da mesma maneira dentro de M. Vejamos um caso simples para ilustrar a questão. Na reta $\mathbb{R}$, sejam $X = [0,1] \cup \{2,3\}$ e $Y = [5,6] \cup \{4,7\}$. Cada um desses subespaços é formado por um intervalo fechado de comprimento 1 e dois pontos isolados. É fácil obter um homeomorfismo $h\colon X \to Y$. Basta, por exemplo, definir $h(2) = 4$, $h(3) = 7$ e, para $0 \leq x \leq 1$, $h(x) = x+5$.

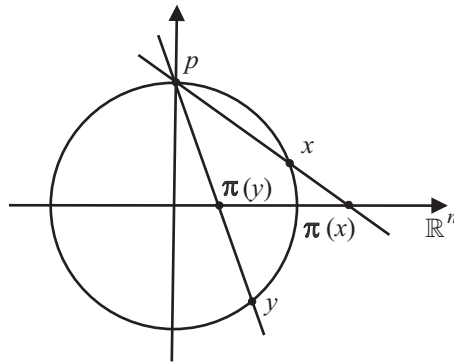
Assim, do ponto de vista topológico, X e Y são indistinguíveis. Mas não se pode deixar de notar uma diferença entre X e Y. É que os dois pontos isolados de X estão do mesmo lado do segmento enquanto em Y, eles estão um de cada lado do segmento. Isto, porém, não é uma diferença intrínseca entre X e Y. É que eles estão imersos em $\mathbb{R}$ de modo diferente. Em termos precisos: não existe um homeomorfismo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(X) = Y$. Para provar esta afirmação, usaremos um fato que será provado mais adiante (e que talvez o leitor já conheça do Cálculo): toda função contínua injetiva $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é monótona. Se o tal homeomorfismo f existisse, deveria transformar os dois pontos isolados de X nos pontos isolados de Y e, sendo monótono (digamos, crescente) deveria ser tal que $f(2) = 4$ e $f(3) = 7$. Como $0 < 2$ teríamos $f(0) < 4$, o que é absurdo pois nenhum $y \in Y$ é menor do que 4.

Exemplo 14. Uma aplicação injetiva $f: M \to N$ que é um homeomorfismo de M sobre sua imagem $f(M)$ chama-se uma *imersão topológica.* Toda imersão isométrica é uma imersão topológica. A

aplicação $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (t, t^2)$, é uma imersão topológica da reta no plano. Com efeito, a inversa $f^{-1}: f(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, dada por $f^{-1}(t, t^2) = t$, é a restrição a $f(\mathbb{R})$ da projeção $p_1: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. As figuras acima ilustram duas aplicações contínuas injetivas $f, g: (0,1) \to \mathbb{R}^2$ que não são imersões topológicas, isto é, suas inversas $f^{-1}: f((0,1)) \to (0,1)$ e $g^{-1}: g((0,1)) \to (0,1)$ são descontínuas.

Exemplo 15. *Toda bola aberta de um espaço vetorial normado E é homeomorfa ao espaço inteiro E.* Em virtude do Exemplo 12, basta considerar a bola unitária $B = B(0;1)$ e exibir um homeomorfismo $f: E \to B$. Poremos $f(x) = x/(1 + |x|)$. Como $|f(x)| = |x|/(1 + |x|) < 1$ para todo $x \in E$, vemos que f é uma aplicação contínua de E em B. Definamos $g: B \to E$ pondo $g(y) = y/(1 - |y|)$. Como $|y| < 1$ para todo $y \in B$, vemos que g é contínua. Além disso, como se verifica facilmente, vale $f(g(y)) = y$ e $g(f(x)) = x$ para quaisquer $y \in B$ e $x \in E$. Logo $g = f^{-1}$ e f é um homeomorfismo.

Exemplo 15a. Segue-se do Exemplo 15 que todo intervalo aberto limitado (a, b) é homeomorfo à reta $\mathbb{R}$, pois (a, b) é a bola aberta de centro no seu ponto médio $(a + b)/2$ e raio $r = (b - a)/2$. Mais geralmente, porém, todo intervalo aberto da reta é homeomorfo a $\mathbb{R}$. Com efeito, se se trata de um intervalo do tipo $(a, +\infty)$, temos o homeomorfismo $f: \mathbb{R} \to (a, +\infty)$, dado por $f(x) = a + e^x$, cujo inverso $g = f^{-1}: (a, +\infty) \to \mathbb{R}$, tem a expressão $g(y) = \log(y - a)$. Se o intervalo aberto for do tipo $(-\infty, b)$, usaremos o homeomorfismo

$h\colon \mathbb{R} \to (-\infty, b)$, definido por $h(x) = b - e^{-x}$, o qual possui o inverso $k\colon(-\infty,b)\to\mathbb{R}$, definido por $k(y)=-\log(b-y)$.

Exemplo 16. *A projeção estereográfica.* Sejam $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \langle x, x\rangle = 1\}$ a esfera unitária n-dimensional e $p = (0,\ldots,0,1) \in S^n$ o seu pólo norte. A projeção estereográfica $\pi\colon S^n - \{p\} \to \mathbb{R}^n$ estabelece um homeomorfismo entre a esfera menos o pólo norte e o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Geometricamente, $\pi(x)$ é o ponto em que a semi-reta $\overrightarrow{px}$ encontra o hiperplano $x_{n+1} = 0$, que identificamos com $\mathbb{R}^n$. A fim de obter uma fórmula para π, observemos que os pontos da semi-reta $\overrightarrow{px}$ têm a forma $p + t\cdot(x - p)$, onde $t > 0$. Tal ponto pertence ao hiperplano $\mathbb{R}^n$ quando sua última coordenada $1+t(x_{n+1}-1)$ é zero. Daí tiramos $t = 1/(1-x_{n+1})$. Convencionemos pôr $x' = (x_1,\ldots,x_n)$ quando $x = (x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})$. Então, sendo $\pi(x) = p + (x-p)/(1-x_{n+1})$, uma conta fácil mostra que $\pi(x) = x'/(1-x_{n+1})$. A expressão $\pi(x) = x'/(1-x_{n+1})$ mostra que $\pi\colon S^n - \{p\} \to \mathbb{R}^n$ é contínua.

(Note que $x \in S^n-\{p\}$ exclui que seja $x_{n+1} = 1$.) Para verificar que π é um homeomorfismo, basta considerar a aplicação $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to S^n - \{p\}$, definida por $\varphi(y) = x$, onde, na notação acima, $x' = 2y/(|y|^2+1)$ e $x_{n+1} = (|y|^2-1)/(|y|^2+1)$. Constata-se sem dificuldade que $\varphi(\pi(x)) = x$ para todo $x \in S^n - \{p\}$ e $\pi(\varphi(y)) = y$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$.

Exemplo 17. *O gráfico de uma aplicação contínua é homeomorfo ao domínio.* Seja $f\colon M \to N$ contínua. O *gráfico* de f é o subconjunto $G(f)$ do produto cartesiano $M \times N$, definido por $G(f) = \{(x, f(x)); x \in M\}$. A aplicação $\widetilde{f}\colon M \to G(f) \subset M \times N$, dada por

$\widetilde{f}(x) = (x, f(x))$, é contínua pois suas coordenadas são contínuas. Sua inversa $G(f) \to M$ dada por $(x, f(x)) \mapsto x$, é contínua pois é igual à restrição $p_1|G(f)$ da projeção $p_1 \colon M \times N \to M$. Assim $\widetilde{f} \colon M \to G(f)$ é um homeomorfismo. Casos particulares: $\mathbb{R} - \{0\}$ é homeomorfo à hipérbole $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy = 1\}$ pois H é o gráfico da função $f \colon \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 1/x$. Também o *hemisfério norte* $S^n_+ = \{y \in S^n; y_{n+1} > 0\}$ é homeomorfo à bola aberta unitária $B = B(0; 1) \subset \mathbb{R}^n$ pois S^n_+ é o gráfico de $g \colon B \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{1 - |x|^2}$.

Com efeito, um ponto $y = (y_1, \ldots, y_n, y_{n+1})$ pertence a S^n_+ se, e somente se, $y_1^2 + \cdots + y_n^2 + y_{n+1}^2 = 1$ e $y_{n+1} > 0$. Pondo $x = (y_1, \ldots, y_n)$, estas duas condições significam que $|x| < 1$ e $y_{n+1} = \sqrt{1 - |x|^2}$, o que nos dá: $y \in S^n_+ \Leftrightarrow y = (x, \sqrt{1 - |x|^2})$.

4 Métricas equivalentes

Intuitivamente, passar de uma métrica para outra mais fina, é a generalização da idéia de tomar uma unidade de medida menor, do que resultariam distâncias maiores. Na definição que daremos a seguir, as métricas mais finas não produzem distâncias maiores no sentido estrito do termo, e sim "topologicamente maiores", como se entenderá *a posteriori*.

Dadas as métricas d_1 e d_2 no mesmo conjunto M, escreveremos, por simplicidade, $M_1 = (M, d_1)$, $M_2 = (M, d_2)$, $B_1(a; r) =$ bola de centro a e raio r segundo a métrica d_1 etc. Em geral, usaremos os índices 1 e 2 para distinguir objetos definidos com auxílio das métricas d_1 ou d_2 respectivamente.

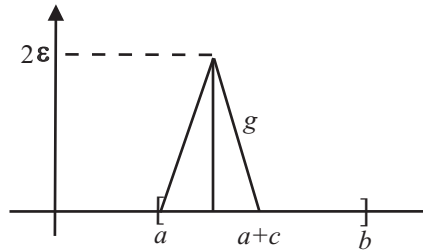
Diremos que d_1 é *mais fina* do que d_2, e escreveremos $d_1 \succ d_2$, quando a aplicação identidade $i_{12} \colon M_1 \to M_2$ for contínua. Como $i_{12}(x) = x$ para todo $x \in M$, a definição de continuidade fornece diretamente a seguinte condição necessária e suficiente para que d_1 seja mais fina do que d_2: para todo $a \in M$ e todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $B_1(a; \delta) \subset B_2(a; \varepsilon)$. Ou seja $d_1 \succ d_1 \Leftrightarrow$ *toda bola aberta segundo d_2 contém uma bola aberta de mesmo centro segundo d_1.*

Exemplo 18. Se o espaço métrico (M, d_1) é discreto (diz-se, neste caso, que d_1 é uma métrica *discreta*) então d_1 é mais fina do que qualquer outra métrica d_2 em M. Por outro lado, se d_2 for mais fina do que a métrica discreta d_1 então, para todo $a \in M$, existe uma bola $B_2(a;\delta)$ contida na bola $\{a\} = B_1(a;\varepsilon)$. Logo $B_2(a;\delta) = \{a\}$ e portanto d_2 também é discreta.

Exemplo 19. *Se existir uma constante $c > 0$ tal que $d_2(x,y) \leq c \cdot d_1(x,y)$ para quaisquer $x, y \in M$, então d_1 é mais fina do que d_2.* Com efeito, esta desigualdade implica que a aplicação identidade $i_{12} \colon M_1 \to M_2$ é lipschitziana, e portanto contínua. Olhada de outro modo, a mesma desigualdade significa que, para todo $a \in M$, tem-se $B_1(a;\varepsilon/c) \subset B_2(a;\varepsilon)$. Vejamos um caso particular desta situação. Seja $E = \mathcal{C}_0([a,b];\mathbb{R})$ o espaço vetorial das funções contínuas limitadas $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$. (Quando estudarmos espaços compactos, mostraremos que toda função contínua $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é limitada.) Já sabemos que $||f|| = \sup\limits_{a \leq x \leq b} |f(x)|$ define uma norma, e portanto uma métrica d em E. Como toda função contínua $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável, a definição $||f||_1 = \int_a^b |f(x)|\, dx$ introduz uma pseudo-norma, e portanto uma pseudo-métrica em E. (Vide Exemplo 29 do Capítulo 1.) Ora, sabe-se do Cálculo que uma função contínua não-negativa, como $x \mapsto |f(x)|$ só pode ter integral nula quando for identicamente nula. Logo, $||\ ||_1$ é, na realidade, uma norma (e portanto define uma métrica d_1) em E. Para quaisquer $f, g \in E$, temos

$$d_1(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \leq (b-a) \cdot \sup_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)| = (b-a) \cdot ||f - g||.$$

Logo a métrica d (da convergência uniforme) é mais fina do que a métrica d_1. Notemos, porém, que d_1 *não é mais fina* do que d. Basta mostrar que nenhuma "bola uniforme" $B(f,\varepsilon)$ pode conter uma bola $B_1(f;\delta)$, segundo d_1. Para isto, consideramos a função $g \colon [a,b] \to \mathbb{R}$, que é zero exceto no intervalo $[a, a+c]$, contido em $[a,b]$, com $c < \delta/2\varepsilon$. Neste intervalo menor, o gráfico de g é um triângulo isósceles, cuja base é $[a, a+c]$ e cuja altura mede 2ε. A área deste triângulo é igual a

$$\int_a^b |g(x)|\, dx. \quad \text{Logo} \quad ||g||_1 = \varepsilon \cdot c < \varepsilon \cdot \delta/2\varepsilon = \delta/2.$$

Assim, $f + g \in B_1(f;\delta)$ mas, como $g(a + c/2) = 2\varepsilon$, temos $||g|| > \varepsilon$ e portanto $f + g \notin B(f;\varepsilon)$. Como ε e δ são números positivos arbitrários, vemos que nenhuma bola segundo a métrica d pode conter uma bola de mesmo centro segundo d_1.

Proposição 4. *Sejam $M_1 = (M, d_1)$ e $M_2 = (M, d_2)$ espaços métricos sobre o mesmo conjunto M. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) $d_1 \succ d_2$; (*Isto é, a aplicação identidade $i_{12}: M_1 \to M_2$ é contínua.*)

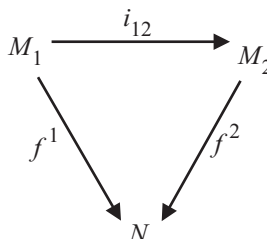
(2) *Para todo espaço métrico N, $f: M_2 \to N$ contínua $\Rightarrow f: M_1 \to N$ contínua;* (*Isto é, toda aplicação contínua segundo d_2 é contínua segundo d_1.*)

(3) *Se $f: M_2 \to \mathbb{R}$ é contínua então $f: M_1 \to \mathbb{R}$ é contínua;*

(4) *Para todo $a \in M$, a função $d_{2a}: M_1 \to \mathbb{R}$, definida por $d_{2a}(x) = d_2(a, x)$ é contínua no ponto $a \in M$;*

(5) *Toda bola aberta segundo d_2 contém uma bola aberta de mesmo centro segundo d_1;*

(6) *A função $d_2: M_1 \times M_1 \to \mathbb{R}$ é contínua.*

Demonstração. Indiquemos com f^1 e f^2 a mesma aplicação f, conforme a consideremos definida em M_1 ou em M_2. Então $f^1 = f^2 \circ i_{12}$.

Isto mostra que a continuidade de i_{12} e f^2 implicam na de f^1. Ou seja: (1) $\Rightarrow$ (2). É óbvio que (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4), pois cada uma dessas afirmações é um caso particular da anterior. Além disso, (1) $\Leftrightarrow$ (4) $\Leftrightarrow$ (5) pois todas estas afirmações podem ser reformuladas assim: para todo $a \in M$ e todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $B_1(a;\delta) \subset B_2(a;\varepsilon)$. Também (6) $\Rightarrow$ (4), como caso particular. Finalmente, (1) implica que a aplicação identidade $M_1 \times M_1 \to M_2 \times M_2$ é contínua e, por conseguinte, a continuidade de $f\colon M_2 \times M_2 \to \mathbb{R}$ acarreta que $f\colon M_1 \times M_1 \to \mathbb{R}$ seja contínua. Ora, $d_2\colon M_2 \times M_2 \to \mathbb{R}$ é reconhecidamente contínua. Logo, (1) implica que $d_2\colon M_1 \times M_1 \to \mathbb{R}$ seja contínua, ou seja, (1) $\Rightarrow$ (6). Com isto fica provada a Proposição 4.

Proposição 5. *A aplicação injetiva $f\colon (M, d_M) \to (N, d_N)$ é contínua se, e somente se, a métrica d_M é mais fina do que a métrica d_1, induzida em M por f.*

Demonstração. Não há perda de generalidade em supor que f seja sobrejetiva. Indiquemos com f_1: $(M,d_1)\to(N,d_N)$ a mesma aplicação que f, quando se toma no domínio a métrica d_1. Então f_1 é

uma isometria, e portanto um homeomorfismo. Seja i_{M_1}:$(M,d_M)\to$ (M, d_1) a aplicação identidade. Como $f = f_1 \circ i_{M_1}$, vemos que f é contínua se, e somente se, i_{M_1} é contínua.

Exemplo 20. Como $f\colon [0, 2\pi) \to S^1$, dada por $f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, é uma bijeção contínua, segue-se que a métrica $d(x, y) = |x - y|$ em $[0, 2\pi)$ é mais fina do que a métrica

$$d_1(x, y) = \sqrt{(\cos x - \cos y)^2 + (\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y)^2},$$

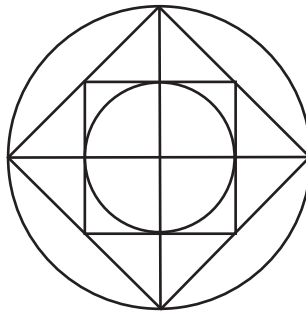
induzida por f.

Duas métricas d_1 e d_2 num espaço M chamam-se *equivalentes* quando cada uma delas é mais fina do que a outra, isto é, quando a

aplicação identidade $i_{12}\colon (M, d_1) \to (M, d_2)$ é um homeomorfismo. Escreve-se então $d_1 \sim d_2$. A relação $d_1 \sim d_2$ é reflexiva, simétrica e transitiva.

Por exemplo, duas métricas discretas no mesmo espaço são sempre equivalentes. Se $d_1 \sim d_2$ e d_1 é discreta então d_2 é discreta.

A fim de que se tenha $d_1 \sim d_2$ em M, é necessário e suficiente que qualquer bola aberta em relação a uma dessas métricas contenha uma bola aberta de mesmo centro em relação à outra.

Exemplo 21. As métricas d, d' e d'' no plano $\mathbb{R}^2$ (Vide Exemplo 4, Capítulo 1) são equivalentes, pois todo disco contém um quadrado com diagonais paralelas aos eixos, o qual contém um quadrado de lados paralelos aos eixos e este, por sua vez, contém um disco, etc., todas essas figuras com o mesmo centro.

Exemplo 22. Se existirem constantes $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ tais que $\alpha \cdot d_1(x, y) \le d_2(x, y) \le \beta \cdot d_1(x, y)$ para quaisquer $x, y \in M$, então as métricas d_1 e d_2 são equivalentes pois a aplicação identidade $i_{12}\colon (M, d_1) \to (M, d_2)$ e sua inversa $i_{21}\colon (M, d_2) \to (M, d_1)$ são, neste caso, ambas lipschitzianas. Assim, por exemplo, no produto cartesiano $M = M_1 \times \cdots \times M_n$, as métricas d, d' e d'' definidas no Exemplo 8, Capítulo 1, são equivalentes, pois cumprem $d'' \le d \le d' \le n \cdot d''$. Em particular, no espaço $\mathbb{R}^n$, as métricas

$$d(x, y) = \sqrt{\Sigma(x_i - y_i)^2},\ \ d'(x, y) = \Sigma|x_i - y_i| \text{ e } d''(x, y) = \max|x_i - y_i|$$

são equivalentes.

Exemplo 23. Seja d' uma métrica em M. Pondo

$$d_1(x, y) = d(x, y)/[1 + d(x, y)] \ \text{ e } \ d_2(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$$

obtêm-se métricas em M. Afirmamos que d_1 e d_2 são ambas equivalentes a d. Em primeiro lugar, como $d_1(x,y) \leq d(x,y)$ e $d_2(x,y) \leq d(x,y)$ para quaisquer $x, y \in M$, vemos que d é mais fina do que d_1 e d_2. Em seguida, dados $a \in M$ e $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta_1 = \varepsilon/(1+\varepsilon)$ e $\delta_2 = \min\{1, \varepsilon\}$. Então $d_1(x,a) < \delta_1 \Rightarrow d(x,a)/[1+d(x,a)] < \varepsilon/(1+\varepsilon) \Rightarrow d(x,a) < \varepsilon$ (eliminando os denominadores e simplificando). Logo $B_1(a;\delta_1) \subset B(a;\varepsilon)$. Além disso, $d_2(x,a) < \delta_2 \Rightarrow d_2(x,a) < 1 \Rightarrow d_2(x,a) = d(x,a) \Rightarrow d(x,a) < \delta_2 \Rightarrow d(x,a) < \varepsilon$. Assim, $B_2(a;\delta_2) \subset B(a;\varepsilon)$. Isto mostra que d_1 e d_2 são ambas mais finas do que d. Conclusão: $d \sim d_1 \sim d_2$. Em particular, vemos que toda métrica é equivalente a alguma métrica limitada, pois $d_1(x,y) \leq 1$ e $d_2(x,y) \leq 1$. Note-se que, quando d é ilimitada, não pode existir uma constante $\beta > 0$ tal que $d(x,y) \leq \beta \cdot d_1(x,y)$ para quaisquer $x, y \in M$ pois esta desigualdade acarretaria $1 + d(x,y) \leq \beta$ quando $x \neq y$, e portanto d seria limitada. Assim, a condição do Exemplo 22 é suficiente porém não é necessária para que duas métricas sejam equivalentes.

O Exemplo 19 nos mostra que, no espaço das funções (limitadas) contínuas $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ as métricas

$$d(f,g) = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)| \ \text{ e } \ d_1(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

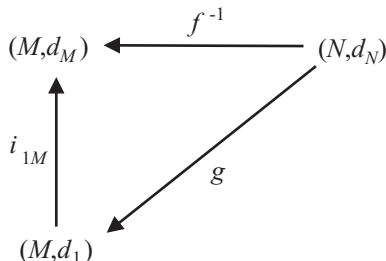
não são equivalentes. Também a métrica usual (induzida pela reta) no intervalo $[0, 2\pi)$ não é equivalente à métrica

$$d_1(x,y) = \sqrt{(\cos x - \cos y)^2 + (\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y)^2},$$

induzida pela bijeção $f\colon [0,2\pi) \to S^1$, onde $f(x) = (\cos x, \operatorname{sen} x)$, porque f não é um homeomorfismo e por causa da

Proposição 6. *A bijeção $f\colon (M, d_M) \to (N, d_N)$ é um homeomorfismo se, e somente se, a métrica d_M é equivalente à métrica d_1, induzida em M por f.*

Demonstração. A aplicação $f_1\colon (M, d_1) \to (N, d_N)$, dada por $f_1(x) = f(x)$, é uma isometria e portanto um homeomorfismo, isto é, sua inversa $g = (f_1)^{-1}\colon (N, d_N) \to (M, d_1)$ é contínua. Considerando a aplicação identidade $i_{1M}\colon (M, d_1) \to (M, d_M)$, temos $f^{-1} = i_{1M} \circ g$. Portanto, d_1 é mais fina do que d_M (isto é, i_{1M} é

contínua) se, e somente se, f^{-1} é contínua. Por outro lado (vide Proposição 5), d_M é mais fina do que d_1 se, e somente se, f é contínua. Logo, $d_1 \sim d_M \Leftrightarrow f$ é um homeomorfismo.

Corolário. *A aplicação $f\colon (M,d) \to (N,d_1)$ é contínua se, e somente se, a métrica $d_f\colon M \times M \to \mathbb{R}$, definida por $d_f(x,y) = d(x,y) + d_1(f(x), f(y))$, é equivalente a d.*

Com efeito, se f é contínua então tomando em $M \times N$ a métrica $\delta[(x,y),(x',y')] = d(x,x') + d_1(y,y')$, sabemos que a aplicação $\widetilde{f}\colon x \mapsto (x, f(x))$ é um homeomorfismo de M sobre o gráfico $G(f) \subset M \times N$. (Vide Exemplo 17.) A métrica d_f é induzida em M pelo homeomorfismo $\widetilde{f}\colon M \to G(f)$, logo é equivalente a d. Para demonstrar a recíproca, observemos que $f\colon (M, d_f) \to (N, d_1)$ é uma contração fraca, e portanto é contínua. Se for $d_f \sim d$, então f será contínua segundo d. (Vide Proposição 4.)

Em particular, se $f\colon (M,d) \to \mathbb{R}$ é contínua, então a métrica $d_f(x,y) = d(x,y) + |f(x) - f(y)|$ é equivalente a d.

Proposição 7. *Sejam $M_1 = (M, d_1)$ e $M_2 = (M, d_2)$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) $d_1 \sim d_2$.

(2) *Uma aplicação $f\colon M \to N$ é contínua segundo d_1 se, e somente se, é contínua segundo d_2 .*

(3) *Uma função real $f\colon M \to \mathbb{R}$ é contínua segundo d_1 se, e somente se, é contínua segundo d_2 .*

(4) *Para todo $a \in M$, as funções $d_{1a}\colon M_2 \to \mathbb{R}$ e $d_{2a}\colon M_1 \to \mathbb{R}$, dadas por $d_{1a}(x) = d_1(a,x)$ e $d_{2a}(x) = d_2(a,x)$, são contínuas no ponto a.*

(5) *Toda bola aberta segundo uma dessas métricas contém uma bola aberta de mesmo centro segundo a outra.*

(6) *As funções* $d_1 \colon M_2 \times M_2 \to \mathbb{R}$ *e* $d_2 \colon M_1 \times M_1 \to \mathbb{R}$ *são contínuas.*

Demonstração. Vide Proposição 4.

5 Transformações lineares e multilineares

Sejam E, F espaços vetoriais. Uma aplicação $f \colon E \to F$ chama-se uma *transformação linear* quando, para quaisquer $x, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, têm-se $f(x+y) = f(x) + f(y)$ e $f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$. Daí resulta que $f(\lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_n \cdot v_n) = \lambda_1 \cdot f(v_1) + \cdots + \lambda_n \cdot f(v_n)$. Se for $F = \mathbb{R}$, diremos que $f \colon E \to \mathbb{R}$ é um *funcional linear.* Estamos interessados na continuidade das transformações lineares.

Começamos observando que *toda transformação linear* $f \colon \mathbb{R}^m \to F$*, definida em* $\mathbb{R}^m$ *e tomando valores num espaço vetorial normado* F *qualquer, é contínua.*

Com efeito, em termos da base canônica $e_1 = (1,0,\ldots,0), \ldots, e_m = (0,\ldots,0,1)$, todo vetor $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ se escreve como $x = x_1 \cdot e_1 + \cdots + x_m \cdot e_m$. Então $f(x) = x_1 \cdot f(e_1) + \cdots + x_m \cdot f(e_m)$ e portanto $|f(x)| \leq |x_1| \cdot |f(e_1)| + \cdots + |x_m| \cdot |f(e_m)|$. Pondo $c = \max\{|f(e_1)|, \ldots, |f(e_m)|\}$, vem $|f(x)| \leq c \cdot (|x_1| + \cdots + |x_m|)$. Usando em $\mathbb{R}^m$ a norma $|x| = |x_1| + \cdots + |x_m|$, temos $|f(x)| \leq c \cdot |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$. Segue-se que, para $x, y \in \mathbb{R}^m$ arbitrários, vale $|f(x) - f(y)| = |f(x-y)| \leq c \cdot |x-y|$. Logo f é lipschitziana e, por conseguinte, contínua.

Mas não é verdade que toda transformação linear $f \colon E \to F$, definida num espaço vetorial normado qualquer E, seja contínua. Vejamos um exemplo de descontinuidade.

Exemplo 24. *Um funcional linear descontínuo.* Seja E o conjunto dos polinômios reais com uma variável. E é um espaço vetorial, no qual definiremos a norma $||p|| = \sup\limits_{0 \leq x \leq 1} |p(x)|$. Seja agora $f \colon E \to \mathbb{R}$ definida por $f(p) = p(2)$. Evidentemente, f é um funcional linear. Mostraremos que f é descontínuo no ponto $0 \in E$ (polinômio identicamente nulo). Com efeito, tomando $\varepsilon = 1/2$ vemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar um polinômio p_n, a saber, $p_n(x) = (x/2)^n$, tal que $||p_n - 0|| = 1/2^n < 1/n$ mas $|f(p_n) - f(0)| = |f(p_n)| = 1 \geq \varepsilon$.

Proposição 8. *Sejam E, F espaços vetoriais normados. As seguintes afirmações a respeito de uma transformação linear $f\colon E \to F$ são equivalentes:*

(1) *f é contínua;*

(2) *f é contínua no ponto $0 \in E$;*

(3) *Existe $c > 0$ tal que $|f(x)| \leq c \cdot |x|$ para todo $x \in E$;*

(4) *Existe $c > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq c \cdot |x - y|$ para quaisquer $x, y \in E$.*

Demonstração. Provaremos que (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (1). As implicações (1) $\Rightarrow$ (2) e (4) $\Rightarrow$ (1) são inteiramente óbvias. Provemos que (2) $\Rightarrow$ (3). Sendo f contínua no ponto 0, com $f(0) = 0$, tomamos $\varepsilon = 1$ e obtemos $\delta > 0$ tal que $|x| < \delta \Rightarrow |f(x)| < 1$. Seja agora c qualquer número tal que $0 < 1/c < \delta$. A relação $|f(x)| \leq c \cdot |x|$ é evidente se $x = 0$. Se, porém, $x \neq 0$, então $\frac{x}{c|x|}$ tem norma $1/c$, portanto menor do que δ. Logo $\left|f\left(\frac{x}{c|x|}\right)\right| < 1$. Como f é linear, isto nos dá $\frac{1}{c|x|}\,|f(x)| < 1$, ou seja, $|f(x)| < c \cdot |x|$. Para mostrar que (3) $\Rightarrow$ (4), basta notar que, sendo f linear, a hipótese (3) implica $|f(x) - f(y)| = |f(x - y)| \leq c \cdot |x - y|$.

Corolário. *Seja $f\colon E \to F$ uma bijeção linear. Para que f seja um homeomorfismo, é necessário e suficiente que existam $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ tais que $\alpha \cdot |x| \leq |f(x)| \leq \beta \cdot |x|$ para todo $x \in E$.*

A condição $|f(x)| \leq \beta \cdot |x|$ é, como vimos, equivalente à continuidade de f. Por outro lado, $\alpha \cdot |x| \leq |f(x)| \forall\, x \in E \Leftrightarrow \alpha \cdot |f^{-1}(y)| \leq |y| \forall\, y \in F \Leftrightarrow |f^{-1}(y)| \leq |y|/\alpha$ é uma condição equivalente à continuidade de f^{-1}.

Exemplo 25. *Uma bijeção linear contínua que não é um homeomorfismo.* Seja $\mathbb{R}^\infty$ o espaço vetorial formado pelas seqüências infinitas $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ de números reais, em cada uma das quais apenas um número finito de coordenadas x_n é $\neq 0$. Consideramos em $\mathbb{R}^\infty$ a norma $|x| = \sqrt{(x_1)^2 + \cdots + (x_n)^2 + \ldots}$, que provém do produto interno $\langle x, y\rangle = x_1 \cdot y_1 + \cdots + x_n \cdot y_n + \ldots$. (Ambas as somas parecem infinitas mas são finitas.) Definamos a transformação linear $f\colon \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$ pondo $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (x_1, x_2/2, \ldots, x_n/n, \ldots)$. Então f é contínua porque $|f(x)| \leq |x|$

para todo $x \in \mathbb{R}^\infty$. A inversa de f é dada por

$$f^{-1}(y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots) = (y_1, 2y_2, \ldots, n \cdot y_n, \ldots).$$

Para cada n, o vetor $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$, cuja n-ésima coordenada é 1 e as outras são zero, cumpre $|e_n| = 1$ e $|f^{-1}(e_n)| = n$. Logo $|f^{-1}(e_n)| \geq n \cdot |e_n|$ e, como n pode ser arbitrariamente grande, concluímos que f^{-1} é descontínua.

De acordo com a Proposição 8, as transformações lineares contínuas $f\colon E \to F$ (E e F espaços vetoriais normados) são precisamente aquelas que são limitadas na esfera unitária $S = \{x \in E; |x| = 1\}$ do espaço E. Indica-se com $\mathcal{L}(E; F)$ o conjunto das transformações lineares contínuas de E em F. Evidentemente, $\mathcal{L}(E; F)$ é um espaço vetorial em relação às operações $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ e $(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x)$, pois se $f, g\colon E \to F$ são contínuas então $f+g$ e $\alpha \cdot f$ também são.

É importante observar que $\mathcal{L}(E; F)$ possui uma norma natural, definida por $||f|| = \sup\{|f(x)|; x \in E, |x| = 1\}$ ou seja $||f|| = \sup\limits_{x \in S} |f(x)|$. Deixamos a cargo do leitor a verificação dos axiomas de uma norma.

O Exemplo 19 contém outro caso de bijeção linear contínua que não é homeomorfismo, a saber: a aplicação identidade id: $(E, ||\ ||) \to (E, ||\ ||_1)$, onde E é o espaço vetorial formado pelas funções contínuas (limitadas) $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, sendo $||f|| = \sup\limits_{a \leq x \leq b} |f(x)|$ e $||f||_1 = \int_a^b |f(x)| dx$.

Sejam $|\ |_1$ e $|\ |_2$ normas no mesmo espaço vetorial E. Escrevamos $E_1 = (E, |\ |_1)$, $E_2 = (E, |\ |_2)$ e indiquemos com $i_{12}\colon E_1 \to E_2$ a aplicação identidade. Diremos que a norma $|\ |_1$ é *mais fina* do que a norma $|\ |_2$ quando i_{12} for contínua, isto é, quando a métrica d_1, proveniente de $|\ |_1$, for mais fina do que a métrica d_2, proveniente de $|\ |_2$. Diremos que $|\ |_1$ e $|\ |_2$ são *normas equivalentes* quando i_{12} for um homeomorfismo. O Corolário da Proposição 8, aplicado à transformação linear $i_{12}\colon E_1 \to E_2$ nos dá:

Proposição 9. *Duas normas $|\ |_1$ e $|\ |_2$ num espaço vetorial E são equivalentes se, e somente se, existem constantes $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ tais que $\alpha \cdot |x|_1 \leq |x|_2 \leq \beta \cdot |x|_1$ para todo $x \in E$.*

Assim esta condição, que era apenas suficiente para a equivalência de métricas em geral, é também necessária quando tais métricas provêm de normas.

Diremos agora algumas palavras sobre a continuidade das aplicações multilineares.

Sejam $E_1, E_2, \ldots, E_n$, F espaços vetoriais. Uma aplicação $f: E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ chama-se *n-linear* quando é linear separadamente em cada uma das suas n variáveis. Isto significa que, para $i = 1, 2, \ldots, n$, têm-se

$$f(x_1, \ldots, x_i + y_i, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) + f(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_n)$$

e

$$f(x_1, \ldots, \alpha \cdot x_i, \ldots, x_n) = \alpha \cdot f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n),$$

sejam quais forem $x_1 \in E_1, \ldots, x_i$, $y_i \in E_i, \ldots, x_n \in E_n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Se algum $x_i = 0$ então, pela segunda condição (com $\alpha = 0$), tem-se $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

Em particular, quando $n = 2$, temos uma aplicação *bilinear* $f: E_1 \times E_2 \to F$, que é caracterizada pelas condições:

$$\begin{aligned}
&f(x_1 + y_1, x_2) = f(x_1, x_2) + f(y_1, x_2);\\
&f(\alpha \cdot x_1, x_2) = \alpha \cdot f(x_1, x_2);\\
&f(x_1, x_2 + y_2) = f(x_1, x_2) + f(x_1, y_2);\\
&f(x_1, \alpha \cdot x_2) = \alpha \cdot f(x_1, x_2).
\end{aligned}$$

Novamente, $f(x_1, 0) = f(0, x_2) = 0$ para quaisquer $x_1 \in E_1$ e $x_2 \in E_2$.

Exemplo 26. A multiplicação por um escalar, $m: \mathbb{R} \times E \to E$, onde $m(\lambda, x) = \lambda \cdot x$ é bilinear. Também todo produto interno $p: E \times E \to \mathbb{R}$, $p(x, y) = \langle x, y \rangle$ é bilinear. Se E e F são espaços vetoriais normados, indiquemos com $\mathcal{L}(E; F)$ o espaço vetorial das aplicações lineares contínuas de E em F. Então $\alpha: \mathcal{L}(E;F) \times E \to F$, definida por $\alpha(T, x) = T(x)$, é bilinear. Também é bilinear a aplicação $\mu: \mathcal{L}(F; G) \times \mathcal{L}(E; F) \to \mathcal{L}(E; G)$, definida por $\mu(T, S) = T \circ S$ (composição de aplicações lineares). A função $\det: \mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ (m fatores), definida por $\det(v_1, \ldots, v_m) =$ determinante da matriz cujas linhas (ou cujas colunas – tanto faz) são os vetores $v_1, \ldots, v_m$, nesta ordem, é m-linear.

Para simplificar a notação, trataremos de aplicações bilineares, embora os resultados sejam válidos, com os mesmos argumentos, no caso n-linear.

Proposição 10. *Sejam E, F, G espaços vetoriais normados e $f\colon E \times F \to G$ uma aplicação bilinear. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1) *f é contínua;*
2) *f é contínua no ponto $(0,0) \in E \times F$;*
3) *existe $c > 0$ tal que $|f(x,y)| \leq c \cdot |x| \cdot |y|$ para quaisquer $x \in E$, $y \in F$;*
4) *f é lipschitziana em cada parte limitada de $E \times F$.*

Demonstração. É evidente que 1) $\Rightarrow$ 2). Para provar que 2) $\Rightarrow$ 3), seja f contínua no ponto $(0,0)$. Como $f(0,0) = 0$, tomando $\varepsilon = 1$, obtemos $\delta > 0$ tal que $|x| < \delta$ e $|y| < \delta$ implicam $|f(x,y)| < 1$. Dados $x \in E$, $y \in F$ não-nulos quaisquer, os vetores $\frac{\delta}{2|x|} \cdot x$ e $\frac{\delta}{2|y|} \cdot y$ têm ambos normas inferiores a δ. Logo,

$$\left| f\left(\frac{\delta}{2|x|} \cdot x, \frac{\delta}{2|y|} \cdot y\right)\right| < 1, \quad \text{ou seja,} \quad \frac{\delta^2}{4|x| \cdot |y|} \cdot |f(x,y)| < 1.$$

Tomando $c = 4/\delta^2$, obtemos então $|f(x,y)| \leq c \cdot |x| \cdot |y|$ sempre que $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Ora, esta desigualdade é evidente quando $x = 0$ ou $y = 0$ porque neste caso ambos os membros se anulam. Mostraremos agora que 3) $\Rightarrow$ 4). Usaremos em $E \times F$ a norma $|z| = |x| + |y|$, onde $z = (x,y)$ e, admitindo 3) como hipótese, provaremos que f é lipschitziana em cada bola $B[0;r]$ de $E \times F$. Com efeito, se $z = (x,y)$ e $z' = (x',y')$ pertencem a esta bola então $|x|$, $|x'|$, $|y|$ e $|y'|$ são $\leq r$. Segue-se que

$$\begin{aligned}
|f(z) - f(z')| &= |f(x,y) - f(x,y') + f(x,y') - f(x',y')| = \\
&= |f(x, y-y') + f(x-x', y')| \leq \\
&\leq |f(x,y-y')| + |f(x-x',y')| \leq \\
&\leq c \cdot |x| \cdot |y-y'| + c|x-x'| \cdot |y'| \leq \\
&\leq c \cdot r \cdot (|x-x'| + |y-y'|) \leq \\
&\leq c \cdot r \cdot |z-z'|.
\end{aligned}$$

A implicação 4) $\Rightarrow$ 1) é evidente.

Corolário. *Seja F um espaço vetorial normado. Toda aplicação bilinear $f\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to F$, definida num par de espaços euclidianos, é contínua.*

Com efeito, sejam $\{e_1, \ldots, e_m\}$ e $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ respectivamente as bases canônicas de $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$. Dados $x = \sum\limits_i x_i e_i$ e $y = \sum\limits_j y_j e'_j$, temos: $f(x,y) = \sum\limits_{i,j} x_i \cdot y_i \cdot f(e_i, e'_j)$. Seja c o maior dos números $|f(e_i, e'_j)|$. Tomando em $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$ as normas $|x| = \sum\limits_i |x_i|$ e $|y| = \sum\limits_j |y_j|$, vale: $|x| \cdot |y| = \sum\limits_{i,j} |x_i| \cdot |y_j|$. Podemos então escrever:

$$|f(x,y)| \leq \sum_{i,j} |x_i| \cdot |y_j| \cdot |f(e_i, e'_j)| \leq c \cdot \sum_{i,j} |x_i| \cdot |y_j| = c \cdot |x| \cdot |y|$$

para qualquer $x \in \mathbb{R}^m$e qualquer $y \in \mathbb{R}^n$. Logo f é contínua.

Observação. É vantajoso imaginar uma aplicação bilinear $f\colon E \times F \to G$ como uma multiplicação, na qual o produto de um elemento de E por um de F pertence a G. De fato, usando a notação $f(x,y) = x \cdot y$, as condições de bilinearidade se exprimem como $(x + x') \cdot y = x \cdot y + x' \cdot y$, $x \cdot (y + y') = x \cdot y + x \cdot y'$ e $(\alpha x) \cdot y = x \cdot (\alpha y) = \alpha \cdot (x \cdot y)$.

Exemplo 27. A Proposição 10 contém a demonstração de que a multiplicação de números reais $m\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou, mais geralmente a multiplicação $m\colon \mathbb{R} \times E \to E$, de um número por um vetor num espaço vetorial normado E, é contínua. Além disso, qualquer produto interno $\langle\, ,\, \rangle\colon E \times E \to \mathbb{R}$ num espaço vetorial E é contínuo em relação à norma por ele induzida em virtude da desigualdade de Cauchy-Schwarz $|\langle x, y\rangle| \leq |x| \cdot |y|$. Também a composição de transformações lineares contínuas $\mu\colon \mathcal{L}(F;G) \times \mathcal{L}(E;F) \to \mathcal{L}(E;G)$ é uma aplicação bilinear contínua relativamente à norma natural acima definida para espaços do tipo $\mathcal{L}(E;F)$. Com efeito, vale $||\mu(T,S)|| = ||T \circ S|| \leq ||T|| \cdot ||S||$, como se verifica sem dificuldade. A função determinante, $\det\colon \mathbb{R}^{m^2} = \mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é contínua, em virtude do corolário acima.

EXERCÍCIOS DO CAPÍTULO 2

§1

1. Sejam $f, g\colon M \to \mathbb{R}$ contínuas no ponto $a \in M$. Se $f(a) < g(a)$, existe $\delta > 0$ tal que, para $x, y \in M$, $d(x,a) < \delta$, $d(y,a) < \delta \Rightarrow f(x) < g(y)$. Enuncie explicitamente o corolário que se obtém tomando $f(x) = 0$ para todo $x \in M$. Conclua que se $B \subset M$ é uma bola fechada e $c \in M - B$ então existe uma bola aberta (e portanto uma bola fechada) B', de centro c, tal que $B' \cap B = \varnothing$.

2. Sejam $f, g\colon M \to N$ contínuas no ponto $a \in M$. Se $f(a) \neq g(a)$, então existe uma bola aberta B, de centro a, tal que $f(B) \cap G(B) = \varnothing$. Em particular, $x \in B \Rightarrow f(x) \neq g(x)$.

3. Sejam $f, g\colon M \to N$ contínuas. Dado $a \in M$, suponha que toda bola de centro a contenha um ponto x tal que $f(x) = g(x)$. Conclua que $f(a) = g(a)$. Use este fato para mostrar que se $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são contínuas e $f(x) = g(x)$ para todo x racional então $f = g$.

4. Sejam $f\colon M \to N \times N$ contínua e $\Delta \subset N \times N$ a diagonal. Prove que $f^{-1}(N \times N - \Delta)$ é uma reunião de bolas abertas em M.

5. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x \cdot \operatorname{sen}(1/x)$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. Mostre que f é contínua no ponto 0 mas não é lipschitziana em intervalo algum contendo 0.

6. Seja $f\colon I \to \mathbb{R}$ derivável em todos os pontos do intervalo I. Mostre que se f é lipschitziana então sua derivada é limitada em I.

7. Sejam I, J intervalos arbitrários da reta e $f\colon I \to J$ uma bijeção tal que $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$. Prove que f (e conseqüentemente f^{-1}) é contínua. Conclua daí a continuidade de $f\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, dada por $f(x) = \sqrt{x}$.

8. Seja $f\colon X \to \mathbb{R}$ contínua, definida num subconjunto $X \subset \mathbb{R}$. Suponha que $P = \{x \in X; f(x) > 0\}$ é limitado e não-vazio. Sejam $a = \inf P$ e $b = \sup P$. Prove que se, $a \in X$ e $b \in X$ então $f(a) \geq 0$ e $f(b) \geq 0$.

9. Dada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua, com $f(a) > 0 > f(b)$, seja $c = \sup\{x \in [a,b]; f(x) > 0\}$. Prove que $f(c) = 0$. Conclua daí que se $f\colon I \to \mathbb{R}$ é contínua num intervalo I então $f(I)$ é um intervalo.

10. Toda função contínua $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é limitada. (*Sugestão:* seja $X = \{x \in [a,b]; f|[a,x]$ é limitada$\}$. Tome $c = \sup X$. Mostre que $c \in X$ e conclua que $X = [a,b]$.

11. Para toda função contínua $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, existem $x_0, x_1 \in [a,b]$ tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para todo $x \in [a,b]$. (*Sugestão:* se x_1, por exemplo, não existisse, então, pondo $\alpha = \sup f$, a função $g(x) = 1/[f(x) - \alpha]$ seria contínua e ilimitada em $[a,b]$.)

12. A imagem de um intervalo limitado e fechado por uma função real contínua é ainda um intervalo limitado e fechado. Todos os demais tipos de intervalo podem ter imagem contínua que seja um intervalo de tipo diferente.

13. Dados os espaços métricos M e N, seja $v\colon \mathcal{B}(M;N)\times M\to N$ definida por $v(f,x)=f(x)$. Mostre que v é contínua no ponto $(f_0,x_0)\in \mathcal{B}(M,N)\times M$ se, e somente se, $f_0\colon M\to N$ é contínua no ponto $x_0\in M$.

14. Sejam M, N espaços métricos e $\varphi\colon M\to N$ qualquer. Defina a aplicação $\varphi^*\colon \mathcal{B}(N;\mathbb{R})\to\mathcal{B}(M;\mathbb{R})$ pondo $\varphi^*(f)=f\circ\varphi$. Mostre que φ^* é uma contração fraca (linear).

15. Dado um conjunto arbitrário X, defina as funções reais $I,S\colon\mathcal{B}(X;\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ pondo $I(f)=\inf\limits_{x\in X}f(x)$ e $S(f)=\sup\limits_{x\in X}f(x)$. Prove que I e S são contínuas.

16. Dado um conjunto arbitrário X, defina a aplicação

$$V\colon\mathcal{B}(X;\mathbb{R})\to\mathcal{B}(X;\mathbb{R}),$$

pondo $V(f)=|f|$, onde $|f|(x)=|f(x)|$. Prove que V é uma contração fraca.

17. Dada $f\colon M\to N$, se existem constantes $c>0$ e $\alpha>0$ tais que f cumpre a "condição de Hölder" $d(f(x),f(y))\le c\cdot d(x,y)^\alpha$, para quaisquer $x,y\in M$, então diz-se que f é *hölderiana*. Mostre que f hölderiana $\Rightarrow f$ contínua. Mostre também que se $f\colon I\to\mathbb{R}$, definida num intervalo, cumpre uma condição de Hölder com $\alpha<1$ então f é constante.

18. Seja $f\colon[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ definida por $f(x)=x^{1/n}$, com $n\in\mathbb{N}$. Mostre que f cumpre a condição de Hölder $|f(x)-f(y)|\le c\cdot|x-y|^{1/n}$, com $c=2^{(n-1)/n}$. Conclua daí a continuidade de f. Observe que f não é lipschitziana em intervalo algum contendo 0.

19. Dadas $f,g\colon M\to\mathbb{R}$, defina $f\vee g\colon M-\mathbb{R}$ e $f\wedge g\colon M\to\mathbb{R}$ pondo, cada $x\in M$, $(f\vee g)(x)=\max\{f(x),g(x)\}$ e $(f\wedge g)(x)=\min\{f(x),g(x)\}$. Prove que se f e g são contínuas no ponto $a\in M$ então $f\vee g$ e $f\wedge g$ são contínuas no mesmo ponto.

20. Seja $f\colon M\to\mathbb{R}$ k-lipschitziana, isto é, $|f(x)-f(y)|\le k\cdot d(x,y)$ para quaisquer $x,y\in M$. prove que tem-se $f(x)=\inf\limits_{y\in M}[f(y)+k\cdot d(x,y)]=\sup\limits_{y\in M}[f(y)-k\cdot d(x,y)]$, para todo $x\in M$.

21. Seja $f\colon Y\to\mathbb{R}$ k-lipschitziana num subconjunto $Y\subset\mathbb{R}$. Prove que existe uma função k-lipschitziana $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $g|Y=f$. (*Sugestão:* Suponha inicialmente f limitada e defina $g(x)=\inf\limits_{y\in Y}[f(y)+k\cdot d(x,y)]$ para todo $x\in\mathbb{R}$. No caso geral, estenda sucessivamente cada restrição $f_n=f|Y_n$ a $[-n-1,n+1]$ onde

$$Y_n=[-n,n]\cup\{Y\cap[-n-1,n+1]\}.)$$

22. Seja $M = A \cup B$. Se $f\colon M \to N$ é tal que $f|A$ e $f|B$ são contínuas, então f é contínua em cada ponto $a \in A \cap B$.

§2

23. Num espaço métrico M, sejam $F = B[a;r]$ e $G = M - B(a;s)$, onde $0 < r < s$. Mostre que $f\colon M \to [0,1]$, definida por
$$f(x) = \frac{d(x,F)}{d(x,F) + d(x,G)}\,,$$
é contínua e, além disso, $f^{-1}(0) = F$, $f^{-1}(1) = G$.

24. Seja $f\colon M \times N \to P$ uma aplicação que "depende apenas da primeira variável", isto é, $f(x,y) = f(x,y')$ quaisquer que sejam $x \in M$, $y, y' \in N$. Defina $g\colon M \to P$ pondo $g(x) = f(x,y)$, onde $y \in N$ é qualquer. Prove que g é contínua se, e somente se, f é contínua.

25. Seja $\pi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a projeção definida por $\pi(x,y) = x$. A fim de que uma aplicação $f\colon [-r,r] \to M$ seja contínua, é necessário e suficiente que $f \circ \pi\colon B[0,r] \to M$ seja contínua na bola de centro 0 e raio r em $\mathbb{R}^2$. Dê exemplo de um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\pi(X) = [-1,1]$ e uma função descontínua $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ com $f \circ \pi\colon X \to \mathbb{R}$ contínua.

26. Seja P^n o espaço projetivo de dimensão n. (Vide Exerc. 55, Cap. 1). A aplicação natural $\pi\colon S^n \to P^n$ é contínua. Além disso, se $B \subset S^n$ é uma bola aberta de raio $r \leq \sqrt{2}/2$ então f transforma B isometricamente sobre uma bola de mesmo raio em P^n. Concluir que, se $f\colon P^n \to M$ é uma aplicação tomando valores num espaço métrico arbitrário M, tem-se f contínua se, e somente se, a composta $f \circ \pi\colon S^n \to M$ for contínua.

27. Seja $f\colon M \to M$ contínua. Para cada inteiro $n \geq 0$, seja $f^n\colon M \to M$ definida por $f^0 = \mathrm{id}$, $f^{n+1} = f \circ f^n$. Suponha que $a \in M$ seja tal que $m \neq n \Rightarrow f^m(a) \neq f^n(a)$. Prove que, para todo $p \in \mathbb{N}$, existe uma bola B, de centro a, tal que $1 \leq i \neq j \leq p \Rightarrow f^i(B) \cap f^j(B) = \varnothing$.

28. Sejam $f\colon M \to N$ contínua e $Y \subset N$ não-vazio. Se $a \in M$ é tal que $d(f(a),Y) > 0$, então existe uma bola B, de centro a, tal que $x \in B \Rightarrow d(f(x),Y) > 0$.

29. Sejam M, N, P espaços métricos. A fim de que $f\colon M \times N \to P$ seja contínua num ponto $(a,b) \in M \times N$ é necessário e suficiente que, dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existam $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que, para $x \in M$ e $y \in N$, se tenha: $d(x,a) < \delta_1\,,\ d(y,b) < \delta_2 \Rightarrow d(f(x,y), f(a,b)) < \varepsilon$.

30. Sejam M, N espaços métricos, $f\colon M \to N$ uma aplicação contínua e Y um subconjunto de N. Seja A o conjunto dos pontos $x \in M$ tais que $d(f(x), N-Y) > 0$. Prove que, para todo $x \in A$, tem-se $d(x, M-A) > 0$.

§3

31. Sejam $f\colon M \to N$ e $g\colon N \to P$ contínuas tais que $g \circ f\colon M \to P$ seja um homeomorfismo. Supondo que f seja sobrejetiva (ou então que g seja injetiva) prove que f e g são ambos homeomorfismos.

32. Sejam $f\colon M \to N$ e $g\colon N \to M$ contínuas tais que $g \circ f = \mathrm{id}\colon M \to M$. Prove que f é um homeomorfismo de M sobre o subespaço $f(M) \subset N$.

33. Mostre que os espaços métricos seguintes são dois a dois homeomorfos:
$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1\}$ (cilindro vertical)
$Y = S^1 \times \mathbb{R}$ (produto do círculo pela reta)
$Z = \mathbb{R}^2 - \{0\}$ (plano menos a origem)
$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 < x^2 + y^2 < 2\}$ (coroa circular)
$T = S^2 - \{p, q\}$ onde $p = (0, 0, 1)$ e $q = (0, 0, -1)$
$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z^2 = x^2 + y^2, z > 0\}$ (cone sem o vértice)

34. Estabeleça um homeomorfismo entre o "primeiro quadrante" $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0\}$ e o semi-plano $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 0\}$.

35. Seja $\pi\colon S^n - \{p\} \to \mathbb{R}^n$ a projeção estereográfica. Prove que não existe uma aplicação contínua $f\colon S^n \to \mathbb{R}^n$ que coincida com π em $S^n - \{p\}$.

36. Um espaço métrico M diz-se "topologicamente homogêneo" quando, dados $a, b \in M$ quaisquer, existe um homeomorfismo $h\colon M \to M$ tal que $h(a) = b$. Prove:

    (a) Se M e N são homeomorfos então M é topologicamente homogêneo se, e somente se, N o é,

    (b) Todo espaço discreto é topologicamente homogêneo.

    (c) Toda bola aberta num espaço vetorial normado é topologicamente homogênea.

    (d) $\overline{P} = \{0, 1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots\}$, com a métrica induzida da reta, não é topologicamente homogêneo.

    (e) O intervalo fechado $[a, b]$ não é topologicamente homogêneo. (Esta parte fica mais fácil depois do Capítulo 4).

37. Mostre que $f\colon S^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$, dada por $f(x, t) = e^t \cdot x$, é um homeomorfismo e use este fato para definir um homeomorfismo φ, de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ sobre si mesmo, talque $\varphi|S^n =$ identidade, $\varphi = \varphi^{-1}$ e $|\varphi(z)| > 1 \Leftrightarrow |z| < 1$.

38. Seja $X \subset \mathbb{R}$. Diz-se que um ponto $a \in X$ é *semi-isolado* em X quando existe um intervalo da forma $I = (a, a + \varepsilon)$ ou da forma $I = (a - \varepsilon, a)$, tal que $X \cap I = \varnothing$. No conjunto $X = \{0, 1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots\}$, 0 é um ponto semi-isolado, enquanto que em $Y = \{0, \pm 1, \pm 1/2, \ldots, \pm 1/n, \ldots\}$, o ponto 0 não é semi-isolado. Mostre que existe um homeomorfismo $h\colon X \to Y$ tal que $h(0) = 0$ e conclua que ser semi-isolado não é uma propriedade topológica.

39. Mostre que o conjunto $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n; |x|^2 + |y|^2 = 1, y \neq 0\}$ é homeomorfo ao produto $\mathbb{R}^m \times S^{n-1}$.

40. Prove que o hiperbolóide $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n; |x|^2 - |y|^2 = 1\}$, é homeomorfo ao produto $S^{m-1} \times \mathbb{R}^n$.

41. Seja B a bola fechada de centro na origem e raio 1 em $\mathbb{R}^2$. Estabeleça um homeomorfismo entre $\mathbb{R}^2 - B$ e $\mathbb{R}^2 - \{0\}$.

42. Sejam p, q pontos distintos da esfera S^2 e $D \subset \mathbb{R}^2$ um disco fechado. Prove que $S^2 - \{p, q\}$ é homeomorfo a $\mathbb{R}^2 - D$.

43. Seja M o conjunto dos discos abertos do plano. Mostre que $d[(B(a; r), B(b; s)] = |a - b| + |r - s|$ define em M uma métrica com a qual M é homeomorfo a $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z > 0\}$.

§4

44. Sejam d_1 , d_2 e d_3 métricas sobre o conjunto M. Se $d_1 \prec d_2 \prec d_3$ e $d_1 \sim d_3$ então $d_1 \sim d_2 \sim d_3$.

45. Defina em $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ uma métrica δ que seja equivalente à métrica euclidiana, coincida com ela em S^1, seja tal que, para todo $r > 0$, o conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x^2 + y^2 < r\}$ seja δ-ilimitado e, por outro lado, o conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 > r\}$ seja δ-limitado.

46. Seja E o espaço vetorial das funções $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ que são limitadas e possuem derivada limitada. Mostre que $||f||_1 = \sup\{|f(x)| + |f'(x)|; x \in [a, b]\}$ define em E uma norma, estritamente mais fina do que $||f|| = \sup\{|f(x)|; x \in [a, b]\}$, porém equivalente a $||f||_* = |f(a)| + \sup\{|f'(x)|; x \in [a, b]\}$ e a
$$||f||_* = \sup_{a \le x \le b} |f(x)| + \sup_{a \le x \le b} |f'(x)|.$$

47. Dados $x, y \in \mathbb{R}$ ponha $\delta(x, y) = |x - y| + 1$ se um desses números for positivo e o outro não e $\delta(x, y) = |x - y|$ no caso contrário. Verifique que δ é uma métrica em $\mathbb{R}$. Compare δ com a métrica usual $d(x, y) = |x - y|$. É δ mais fina, menos fina, equivalente ou incomparável com d?

48. Seja E o espaço vetorial das funções lipschitzianas $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ tais que $f(0) = 0$. Considere em E as normas
$$||f|| = \sup_{0 \le x \le 1} |f(x)| \quad \text{e} \quad \langle\langle f \rangle\rangle = \sup_{0 < x \le 1} \frac{|f(x)|}{x}.$$
Mostre que $\langle\langle\ \rangle\rangle$ é estritamente mais fina do que $||\ ||$. Dada $\varphi \in E$, com derivada contínua em $[0, 1]$, tal que $\varphi'(0) = 0$, seja F o subconjunto de E formado pelas funções f tais que $|f(x)| \le |\varphi(x)|$ para todo $x \in [0, 1]$. Mostre que, no subconjunto F, as métricas induzidas por estas duas normas são equivalentes.

49. As métricas $d(x,y) = |x - y|$ e $\delta(x,y) = |1/x - 1/y|$ são equivalentes em $(0, +\infty)$.

50. Sejam d_1 e d_2 métricas em M. Prove que $d(x,y) = d_1(x,y) + d_2(x,y)$ e

$$\delta(x,y) = \max\{d_1(x,y), d_2(x,y)\}$$

definem métricas em M, ambas mais finas que d_1 e d_2; d_1 e d_2 são equivalentes se, e somente se as 4 métricas d_1, d_2, d e δ são equivalentes entre si.

51. Seja $\varphi\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ uma função crescente, tal que $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(x + y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$. (Por exemplo, φ côncava, crescente, com $\varphi(0) = 0$.) Então, se d é uma métrica em M, $\varphi \circ d$ também é uma métrica. Se, além disso, φ for contínua no ponto 0, as métricas d e $\varphi \circ d$ são equivalentes. Obtenha exemplos de tal φ considerando funções deriváveis, com $\varphi(0) = 0$, $d\varphi/dx > 0$ e $d^2\varphi/dx^2 \leq 0$.

§5

52. Sejam E, F espaços vetoriais normados. Se uma aplicação linear $f\colon E \to F$ for descontínua, então f é descontínua em todos os pontos de E.

53. Dê exemplo de uma aplicação bilinear descontínua.

54. Sejam E, F espaços vetoriais normados. Dada $f\colon E \to F$ linear contínua, ponhamos $||f|| = \sup\{|f(x)|; x \in E, |x| = 1\}$. Prove que isto define uma norma em $\mathcal{L}(E;F)$.

55. Seja E o espaço vetorial das funções $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ que possuem derivadas de todas as ordens. (Cada uma delas é limitada em $[a,b]$.) Considerando em E a norma $||f|| = \sup\{|f(x)|; x \in [a,b]\}$, mostre que a transformação linear $\delta\colon E \to E$, definida por $\delta(f) = f'$, é descontínua. Por outro lado, a norma $||f||_1 = \sup\{|f(x)| + |f'(x)|; x \in [a,b]\}$ torna $\delta\colon (E, || \ ||_1) \to (E, || \ ||)$ contínua.

56. Seja $f\colon E \to \mathbb{R}$ um funcional linear contínuo no espaço vetorial normado E. Mostre que f é limitado em toda bola aberta $B \subset E$ mas não atinge seu inf nem seu sup em B.

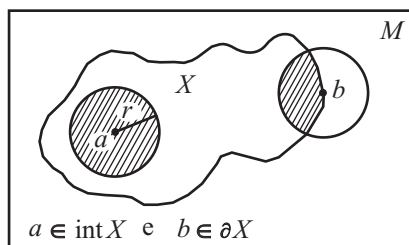
57. Seja E o espaço vetorial das funções contínuas $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, com a norma do sup. Dada $\xi \in E$, mostre que a transformação linear $T_\xi\colon E \to E$, dada por $T_\xi(f) = \xi \cdot f$, é contínua e sua norma é $||\xi||$. Mostre que T_ξ possui uma inversa contínua se, e somente se, $\xi(x) \neq 0$ para todo $x \in [0,1]$.

58. Sejam E, F espaços vetoriais normados. Se substituirmos as normas de E e/ou F por outras equivalentes, uma aplicação lipschitziana $f\colon E \to F$ não perde esta propriedade. Mostre que o resultado análogo com "métrica" em vez de "norma" seria falso.

Capítulo 3

Linguagem Básica da Topologia

1 Conjuntos abertos

Seja X um subconjunto de um espaço métrico M. Um ponto $a \in X$ diz-se um *ponto interior* a X quando é centro de uma bola aberta contida em X, ou seja, quando existe $r > 0$ tal que $d(x, a) < r \Rightarrow x \in X$. Chama-se *o interior* de X em M ao conjunto int X formado pelos pontos interiores a X.

Dizer que o ponto $b \in X$ *não* é interior a X significa, então, afirmar que toda bola aberta de centro b contém algum ponto que não pertence a X. Neste caso, o ponto b pertence à fronteira de X. A fronteira de X pode também conter pontos que não estão em X, de acordo com a definição abaixo.

A *fronteira* de X em M é o conjunto ∂X, formado pelos pontos $b \in M$ tais que toda bola aberta de centro b contém pelo menos um ponto de X e um ponto do complementar $M - X$.

Observação. Toda bola contém evidentemente um centro b, o qual pertence a X ou a $M-X$. Para mostrar que $b \in \partial X$ basta, quando $b \in X$, provar que toda bola aberta de centro b contém pontos de $M-X$.

Exemplo 1. O interior do intervalo $[0,1)$ na reta é o intervalo aberto $(0,1)$ e sua fronteira consta dos pontos 0 e 1 apenas. Com efeito, se $0 < a < 1$ então, pondo $r = \min\{a, 1-a\}$ temos $(a-r, a+r) \subset [0,1)$, logo $a \in \operatorname{int}[0,1)$. Mas $0 \in \partial[0,1)$ pois todo intervalo aberto de centro 0 contém números negativos, portanto não pertencentes a $[0,1)$. Também $1 \in \partial[0,1)$ pois, embora $1 \notin [0,1)$, todo intervalo aberto de centro 1 contém números positivos menores do que 1. Além disso, nenhum número negativo ou maior do que 1 pode pertencer à fronteira de $[0,1)$.

Exemplo 2. Seja $\mathbb{Q}$ o conjunto nos números racionais. O interior de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ é vazio pois nenhum intervalo aberto pode ser formado apenas por números racionais. Por outro lado a fronteira de $\mathbb{Q}$ é toda a reta $\mathbb{R}$ porque qualquer intervalo aberto contém números racionais e números irracionais.

Observação. As noções de interior e fronteira são *relativas*, isto é, dependem do espaço métrico M no qual se considera X imerso. Por exemplo, no Exemplo 1 acima, temos $\operatorname{int}[0,1) = (0,1)$ e $\partial[0,1) = \{0,1\}$ em $\mathbb{R}$. Mas se considerarmos $\mathbb{R}$ como o eixo das abcissas $(y=0)$ no plano $\mathbb{R}^2$, teremos $[0,1) \subset \mathbb{R}^2$ e, como subconjunto do plano $\mathbb{R}^2$, o interior de $[0,1)$ é vazio e sua fronteira é o intervalo fechado $[0,1]$. Assim, quando se fala em "interior de X" e "fronteira de X", deve-se especificar em relação a qual espaço métrico M, salvo quando isto seja evidente no contexto.

Seja X um subconjunto de um espaço métrico M. Dado um ponto arbitrário $c \in M$, há três possibilidades que se excluem mutuamente: ou existe uma bola aberta de centro c contida em X (isto é, $c \in \operatorname{int} X$), ou existe uma bola aberta de centro c contida em $M-X$ (ou seja, $c \in \operatorname{int}(M-X)$) ou toda bola aberta de centro c contém pontos de X e de $M-X$ (quer dizer, $c \in \partial X$). Logo todo conjunto X determina a decomposição do espaço como reunião de três subconjuntos dois a dois disjuntos:

$$M = \operatorname{int} X \cup \partial X \cup \operatorname{int}(M-X).$$

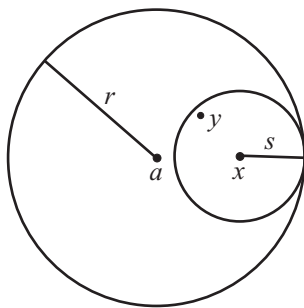
Um ou dois dos três conjuntos acima podem ser vazios. Esta decomposição ilustra o fato (evidente a partir da definição) de que $\partial X = \partial(M - X)$.

Por exemplo, se $M = \mathbb{R}$ e $x = [0,1)$, temos $\mathbb{R} = (0,1) \cup \{0,1\} \cup Y$, onde $Y = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

Um subconjunto A de um espaço métrico M diz-se *aberto* em M quando todos os seus pontos são interiores, isto é, $\operatorname{int} A = A$. Assim, $A \subset M$ é aberto se, e somente se, $A \cap \partial A = \varnothing$.

Para provar que um conjunto $A \subset M$ é aberto em M devemos, em princípio, obter, para cada $x \in A$, um raio $r > 0$ tal que $B(x; r) \subset A$.

Proposição 1. *Em qualquer espaço métrico M, uma bola aberta $B(a; r)$ é um conjunto aberto.*

Demonstração. Seja $x \in B(a; r)$. Então $d(a, x) < r$ e portanto $s = r - d(a, x)$ é um número positivo. Afirmamos que $B(x; s) \subset B(a; r)$. De fato, se $y \in B(x; s)$ então $d(x, y) < s$ e portanto $d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y) < d(a, x) + s = r$. Logo $y \in B(a; r)$.

Corolário. *Para todo $X \subset M$,* $\operatorname{int} X$ *é aberto em M.*

Com efeito, seja $a \in \operatorname{int} X$. Então existe $r > 0$ tal que $B(a; r) \subset X$. Para todo $x \in B(a; r)$, como vimos acima, existe $s > 0$ tal que $B(x, s) \subset B(a; r)$, donde $B(x; s) \subset X$. Isto mostra que todo ponto $x \in B(a; r)$ é interior a X, ou seja, que $B(a; r) \subset \operatorname{int} X$. Logo $\operatorname{int} X$ é aberto.

Na realidade, $\operatorname{int} X$ é o *maior* aberto contido em X. Isto quer dizer que se A é aberto e $A \subset X$ então $A \subset \operatorname{int} X$. Para verificar isto, basta notar que todo ponto $a \in A$ é inferior a A e portanto (como $A \subset X$) interior a X.

Exemplo 3. Um ponto $a \in M$ é um conjunto aberto em M se, e somente se, é um ponto isolado, pois só sendo o próprio a uma bola é que pode conter uma bola. Um espaço métrico é discreto se, e somente se, todos os seus subconjuntos são abertos.

Exemplo 4. O espaço métrico M é, evidentemente, aberto em M. Isto mostra como a propriedade "X é aberto" é relativa, isto é, depende do espaço M em que se considera X imerso: X é sempre aberto no próprio espaço X. Para um exemplo menos trivial, observemos que $X = [0, 1)$ é um subconjunto aberto do espaço $M = [0, 1]$: basta notar que cada intervalo do tipo $[0, \varepsilon)$, com $0 < \varepsilon \leq 1$, é uma bola aberta de centro 0 no espaço $M = [0, 1]$. No entanto, $[0, 1)$ não é aberto na reta $\mathbb{R}$. Também o intervalo aberto $(0, 1)$ do eixo das abcissas em $\mathbb{R}^2$ é aberto nesse eixo mas não é aberto em $\mathbb{R}^2$. Um conjunto que é aberto em qualquer espaço métrico que o contenha é o conjunto vazio $\varnothing$. Com efeito, para provar que um conjunto X não é aberto, deve-se exibir um ponto $x \in X$ que não seja interior a X. Isto é evidentemente impossível de fazer quando $X = \varnothing$. Logo $\varnothing$ é aberto.

Exemplo 5. *Em todo espaço métrico M, o complementar de uma bola fechada $B[a; r]$ é um conjunto aberto $A = M - B[a; r]$.* Com efeito, seja $c \in A$, isto é, $d(a, c) > r$. Tomemos um número $s > 0$ tal que $r + s < d(a, c)$. Pelo Corolário da Proposição 2, Capítulo 1, as bolas fechadas $B[a; r]$ e $B[c; s]$ são disjuntas. Com maior razão, $B[a; r] \cap B[c; s] = \varnothing$, ou seja, $B(c; s) \subset M - B[a; r]$. Logo todo ponto $c \in A$ é interior. É mais fácil ainda ver que o complementar de um ponto $a \in M$ é um conjunto aberto $M - \{a\}$: se $b \neq a$ então a bola aberta $B(b; r)$, com $r = d(a, b)$, só contém pontos em $M - \{a\}$. De um modo geral, *se $F = \{a_1, \ldots, a_n\}$ é qualquer subconjunto finito de M, seu complementar $M - F$ é aberto em M*, pois se $b \in M - F$ então o número $r = \min\{d(b, a_1), \ldots, d(b, a_n)\}$ é positivo e a bola $B(b; r)$ não contém nenhum dos pontos $a_1, \ldots, a_n$, isto é, $B(b; r) \subset M - F$.

Exemplo 6. Todo intervalo aberto limitado (a, b) é um subconjunto aberto da reta pois é a bola aberta de centro no seu ponto médio $(a + b)/2$ e raio $r = (b - a)/2$. Mas as semi-retas abertas $(-\infty, b)$ e $(a, +\infty)$ também são subconjuntos abertos em $\mathbb{R}$. Com efeito, se $c \in (-\infty, b)$, isto é, $c < b$, então, pondo $r = b - c$, vemos

que $(c-r, c+r)$ é uma bola aberta de centro c, contida em $(-\infty, b)$. De modo análogo se vê que $(a, +\infty)$ é aberto.

Exemplo 7. Uma bola fechada pode ser um conjunto aberto ou não, conforme o caso. Se $M = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$, com a métrica induzida da reta então a bola fechada de centro 0 e raio 1 em M coincide com a bola aberta de mesmo centro e mesmo raio, logo é um conjunto aberto em M. Mas se E é um espaço vetorial normado diferente de 0, uma bola fechada $B[a;r]$ nunca é um subconjunto aberto de E. Com efeito, tomando $x \neq 0$ em E, pondo $u = x/|x|$ e $b = a + r \cdot u$, vemos que $|b - a| = r$. Logo $b \in B[a;r]$. Mas b não é interior a esta bola fechada pois, para todo $s > 0$, o ponto $a + (r + s/2) \cdot u$ pertence à bola aberta de centro b e raio s mas está fora de $B[a;r]$. Assim, nenhuma bola aberta de centro b pode estar contida em $B[a;r]$. Isto mostra que todos os pontos b pertencentes à esfera $S(a;r)$ estão na fronteira da bola $B[a;r]$. Segue-se então da Proposição 1 que $\operatorname{int} B[a;r] = B(a;r)$. Pelo Exemplo 5, nenhum ponto $c \in E$ tal que $|c - a| > r$ pertence à fronteira de $B[a;r]$. Logo $\partial B[a;r] = S(a;r)$, como era de se esperar.

Proposição 2. *Seja $\mathfrak{U}$ a coleção dos subconjuntos abertos de um espaço métrico M. Então:*

(1) $M \in \mathfrak{U}$ *e* $\varnothing \in \mathfrak{U}$. (*O espaço inteiro e o conjunto vazio são abertos.*)

(2) *Se* $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{U}$ *então* $A_1 \cap \cdots \cap A_n \in \mathfrak{U}$. (*A interseção de um número finito de conjuntos abertos é um conjunto aberto.*)

(3) *Se* $A_\lambda \in \mathfrak{U}$ *para todo* $\lambda \in L$ *então* $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \in \mathfrak{U}$. (*A reunião de uma família qualquer de conjuntos abertos é um conjunto aberto.*)

Demonstração. (1) já foi observado no Exemplo 4. Para provar (2), suponhamos que $a \in A_1, \ldots, a \in A_n$. Como estes conjuntos são abertos, existem $r_1 > 0, \ldots, r_n > 0$ tais que $B(a;r_1) \subset A_1, \ldots, B(a;r_n) \subset A_n$. Seja r o menor dos números $r_1, \ldots, r_n$. Então

$$B(a;r) \subset B(a;r_1) \subset A_1, \ldots, B(a;r) \subset B(a;r_n) \subset A_n$$

e daí

$$B(a;r) \subset A_1 \cap \cdots \cap A_n .$$

Logo $A_1 \cap \cdots \cap A_n$ é aberto. Resta provar (3). Seja então $a \in A$. Existe um índice $\lambda \in L$ tal que $a \in A_\lambda$. Como este conjunto é aberto, há uma bola $B(a;r)$ contida em A_λ. Logo $B(a;r) \subset A$.

Corolário. *Um subconjunto $A \subset M$ é aberto se, e somente se, é uma reunião de bolas abertas.*

De fato, se $A = \cup B_\lambda$ é uma reunião de bolas abertas, então A é aberto em M, em virtude da Proposição 1 e do item (3) da Proposição 2. Reciprocamente, se A é aberto então, para cada $x \in A$, podemos obter uma bola aberta B, tal que $x \in B_x \subset A$, o que se escreve também como $\{x\} \subset B_x \subset A$. Tomando reuniões, vem $A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subset \bigcup_{x \in A} B_x \subset A$. Logo $A = \bigcup_{x \in A} B_x$, o que mostra que todo aberto é reunião de bolas abertas.

Exprime-se o corolário acima dizendo que as bolas abertas formam uma "base de abertos" para o espaço métrico M.

Exemplo 8. A interseção de uma família infinita de abertos pode não ser um conjunto aberto. Por exemplo, um ponto $a \in M$ não é aberto em M a menos que seja isolado. Mas todo ponto a é interseção de uma família enumerável de abertos, a saber, $\{a\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B\left(a; \frac{1}{n}\right)$. Com efeito, se $x \neq a$ então $d(x,a) > 0$, logo existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $d(x,a) > 1/n$. Assim sendo, $x \notin B(a;1/n)$. Isto mostra que apenas o ponto a pertence a todas as bolas abertas $B(a;1/n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 9. *Abertos num subespaço.* Seja $X \subset M$. Considerando em X a métrica induzida por M, *os conjuntos abertos no subespaço métrico X são as interseções $A \cap X$, onde A é aberto em M.* Isto decorre do fato, já observado, de que as bolas abertas em X têm forma $B^X(a;r) = B(a;r) \cap X$, onde $B(a;r)$ é uma bola em M. Ora, os subconjuntos abertos do espaço X são, pelo Corolário da Proposição 2, as reuniões de bolas abertas em X. Logo, $A' \subset X$ é aberto $\Leftrightarrow A' = \bigcup_\lambda B_\lambda^X = \bigcup_\lambda (B_\lambda \cap X) = \left(\bigcup_\lambda B_\lambda\right) \cap X = A \cap X$, onde $A = \cup B_\lambda$ é aberto em M. Em particular, se X é aberto em M, os abertos do subespaço X são os subconjuntos abertos de M que estão contidos em X. Quando X não é aberto em M então, evidentemente, todo conjunto aberto em M e contido em X é também aberto em X, mas existem subconjuntos $A' \subset X$ que

são abertos em X mas não em M. (O próprio X é um deles.) Por exemplo, se $0 < \varepsilon < b - a$, o intervalo $[a, a + \varepsilon)$ é aberto no subespaço $[a, b]$ da reta mas não é aberto em $\mathbb{R}$.

Exemplo 10. *O conjunto das aplicações limitadas descontínuas é aberto em* $\mathcal{B}(M; N)$. Mais precisamente, dado $a \in M$, seja D_a o conjunto das aplicações limitadas $f \colon M \to N$ que são descontínuas no ponto a. Mostraremos que D_a é aberto. Para isto, tomemos $f \in D_a$. Existe $\varepsilon > 0$ com a seguinte propriedade: para todo $\delta > 0$ pode-se obter $x_\delta \in M$ com $d(x_\delta, a) < \delta$ e $d(f(x_\delta), f(a)) \geq 3 \cdot \varepsilon$. Afirmamos que se $g \in \mathcal{B}(M; N)$ e $d(g, f) < \varepsilon$ então $g \in D_a$. Com efeito, nestas condições, para todo $\delta > 0$ temos:

$$3 \cdot \varepsilon \leq d(f(x_\delta), f(a)) \leq d(f(x_\delta), g(x_\delta)) + d(g(x_\delta), g(a)) + d(g(a), f(a)).$$

Ora, na soma acima, a primeira e a terceira parcelas são $< \varepsilon$ e a soma das três é $\geq 3 \cdot \varepsilon$. Assim, a segunda parcela é $\geq \varepsilon$. Logo $g \in D_a$. Seja agora D o conjunto de todas as aplicações limitadas descontínuas $f \colon M \to N$. Temos $D = \bigcup_{a \in M} D_a$. Logo D é aberto em $\mathcal{B}(M; N)$. De modo análogo se mostra que, dada $f \colon M \to N$, o conjunto das aplicações $g \colon M \to N$ que estão a uma distância finita de f e são descontínuas é aberto no espaço métrico $\mathcal{B}_f(M; N)$.

Num espaço métrico, diz-se que o conjunto V é uma *vizinhança* do ponto a quando $a \in \operatorname{int} V$.

Assim, V é uma vizinhança de a se, e somente se, V contém um aberto que contém a.

A interseção de um número finito de vizinhanças de a é ainda uma vizinhança de a.

Se V é uma vizinhança de a e $W \supset V$ então W é uma vizinhança de a.

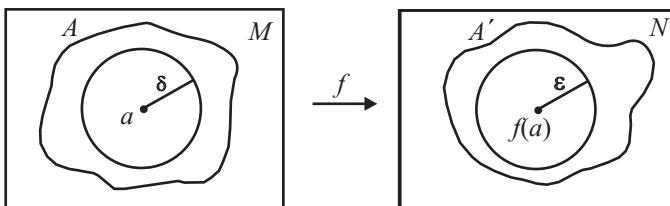
Um conjunto é aberto se, e somente se, é uma vizinhança de cada um dos seus pontos.

A fim de que $f \colon M \to N$ seja contínua no ponto $a \in M$ é necessário e suficiente que, para cada vizinhança V de $f(a)$ em N exista uma vizinhança U de a em M tal que $f(U) \subset V$.

2 Relações entre conjuntos abertos e continuidade

A importância da noção de conjunto aberto na Topologia dos Espaços Métricos se deve principalmente ao resultado seguinte.

Proposição 3. *Sejam M, N espaços métricos. A fim de que uma aplicação $f\colon M \to N$ seja contínua, é necessário e suficiente que a imagem inversa $f^{-1}(A')$ de todo subconjunto aberto $A' \subset N$ seja um subconjunto aberto de M.*

Demonstração. Suponhamos primeiramente que f seja contínua, tomemos $A' \subset N$ aberto e mostremos que $f^{-1}(A')$ é aberto em M. De fato, para cada $a \in f^{-1}(A')$, temos $f(a) \in A'$. Pela definição de conjunto aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(f(a);\varepsilon) \subset A'$. Sendo f contínua no ponto a, ao ε corresponde um $\delta > 0$ tal que $f(B(a;\delta)) \subset B(f(a);\varepsilon) \subset A'$. Isto quer dizer que $B(a;\delta) \subset f^{-1}(A')$. Logo $f^{-1}(A')$ é aberto.

Reciprocamente, suponhamos que a imagem inversa por f de cada aberto em N seja um aberto em M. Seja $a \in M$. Mostraremos que f é contínua no ponto a. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, a bola $A' = B(f(a);\varepsilon)$ é um aberto em N, contendo $f(a)$. Logo sua imagem inversa $A = f^{-1}(A')$ é um aberto em M, contendo a. Assim existe $\delta > 0$ tal que $B(a;\delta) \subset A$, ou seja, $f(B(a;\delta)) \subset B(f(a);\varepsilon)$.

Corolário da demonstração. *A fim de que $f\colon M \to N$ seja contínua no ponto $a \in M$, é necessário e suficiente que, para cada aberto $A' \subset N$ com $f(a) \in A'$, exista um aberto $A \subset M$, com $a \in A$, tal que $f(A) \subset A'$.*

Corolário 1. *O produto cartesiano $A_1 \times \cdots \times A_n$ de conjuntos abertos $A_i \subset M_i$ é um subconjunto aberto de $M = M_1 \times \cdots \times M_n$.*

Com efeito, para cada $i = 1, \ldots, n$, a projeção $p_i \colon M \to M_i$ é contínua, logo $p_i^{-1}(A_i)$ é aberto em M. Ora, $A_1 \times \cdots \times A_n = p_1^{-1}(A_1) \cap \cdots \cap p_n^{-1}(A_n)$, e a interseção de um número finito de abertos é um aberto.

Corolário 2. *Sejam $f_1, \ldots, f_n \colon M \to \mathbb{R}$ funções reais contínuas. O conjunto A, formado pelos pontos $x \in M$ tais que*

$$f_1(x) > 0, \ldots, f_n(x) > 0,$$

é aberto em M.

Ou seja: se as funções $f_1, \ldots, f_n$ são todas positivas num ponto $a \in M$ então existe uma bola aberta $B(a; r)$ tal que $f_1(x) > 0$, $\ldots, f_n(x) > 0$ para todo $x \in B(a; r)$.

Isto pode ser provado diretamente, a partir das definições, ou então do seguinte modo: seja $f \colon M \to \mathbb{R}^n$ definida or $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$. Então f é contínua e $A = f^{-1}(A')$, onde $A' \subset \mathbb{R}^n$ é o conjunto dos pontos cujas coordenadas são todas positivas. Ora, $A' = (0, +\infty) \times \cdots \times (0, +\infty)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$, como produto cartesiano de abertos. Logo sua imagem inversa A é um aberto em M.

Corolário 3. *Sejam $f, g \colon M \to N$ contínuas. O conjunto $A = \{x \in M; f(x) \neq g(x)\}$ é aberto em M.*

Com efeito, a função $\varphi \colon M \to \mathbb{R}$, definida por $\varphi(x) = d(f(x), g(x))$, é contínua. Como $A = \{x \in M; \varphi(x) > 0\}$, o Corolário 2 garante que A é aberto em M.

Exemplo 11. Podemos ver de outro modo que uma bola aberta $B(a; r)$ é um conjunto aberto. Basta notar que $f \colon M \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = r - d(a, x)$, é contínua e que $B(a; r)$ é o conjunto dos pontos $x \in M$ tais que $f(x) > 0$. De modo análogo, podemos ver que $A = M - B[a; r]$ é aberto, pois A é o conjunto dos pontos de M nos quais a função $g(x) = d(a, x) - r$ é positiva.

Exemplo 12. A imagem direta $f(A)$ de um conjunto aberto $A \subset M$ por uma aplicação contínua $f \colon M \to N$ pode não ser um conjunto aberto em N. Por exemplo, se $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $f(x) = x^2$, então, para $A = (-a, a)$ temos $f(A) = [0, a^2)$, que não é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$.

Uma aplicação $f \colon M \to N$ chama-se *aberta* quando para cada $A \subset M$ aberto, sua imagem $f(A)$ é um subconjunto aberto de N. Em suma: quando f transforma abertos em abertos.

Exemplo 13. Vimos acima que uma aplicação contínua não precisa ser aberta. Tampouco uma aplicação aberta precisa ser contínua. De fato, segue-se da Proposição 3 que uma bijeção $f\colon M \to N$ é contínua se, e somente se, sua inversa $f^{-1}\colon N \to M$ é aberta. Tomemos agora $f\colon M \to N$, uma bijeção contínua que não seja um homeomorfismo. (Vide Exemplos 9 e 10 do Capítulo 2.) Então sua inversa $f^{-1}\colon N \to M$ não é contínua mas é aberta. Ou ainda: seja N um espaço métrico discreto. Toda aplicação $f\colon M \to N$ é aberta (já que todo subconjunto de N é aberto). Mas nem toda aplicação $f\colon M \to N$ é contínua.

Proposição 4. *Sejam M, N espaços métricos. A fim de que uma bijeção $h\colon M \to N$ seja um homeomorfismo, é necessário e suficiente que h induza uma bijeção entre os abertos de M e os abertos de N, isto é, para cada $X \subset M$, $h(X)$ é aberto em N se, e somente se, X for aberto em M.*

Demonstração. Basta observar que h é contínua se, e somente se, h^{-1} for aberta.

Corolário. *Sejam d_1 e d_2 métricas no mesmo conjunto M. A fim de que d_1 e d_2 sejam equivalentes, é necessário e suficiente que os espaços métricos (M, d_1) e (M, d_2) possuam os mesmos conjuntos abertos.*

Assim, por exemplo, ao considerarmos os subconjuntos abertos do produto cartesiano, é indiferente qual métrica estamos usando, dentre as três que foram definidas no Exemplo 8 do Capítulo 1, pois essas métricas são equivalentes.

Proposição 5. *Um subconjunto $A \subset M \times N$ é aberto se, e somente se, é reunião de "retângulos" $U \times V$, onde $U \subset M$ e $V \subset N$ são abertos.*

Demonstração. Se $A = \bigcup_{\lambda} U_\lambda \times V_\lambda$ onde, para cada λ, $U_\lambda \subset M$ e $V_\lambda \subset N$ são abertos, então A é uma reunião de abertos (vide Corolário 1 da Proposição 3) e portanto é aberto. Reciprocamente, se $A \subset M \times N$ é aberto, tomemos em $M \times N$ a métrica $\delta[(x, y), (x', y')] = \max\{d(x, x'), d(y, y')\}$, segundo a qual cada bola aberta é o produto de uma bola aberta em M por uma bola aberta em N. Então, para cada ponto $z \in A$ existem bolas abertas $U_z \subset M$ e $V_z \subset N$ tais que $z \in U_z \times V_z \subset A$, ou seja $\{z\} \subset U_z \times V_z \subset A$.

Tomando reuniões, vem: $A = \bigcup_{z \in A} \{z\} \subset \bigcup_{z \in A} U_z \times V_z \subset A$, e portanto $A = \cup U_z \times V_z$, como queríamos demonstrar.

Corolário. *As projeções* $p_1 \colon M \times N \to M$ *e* $p_2 \colon M \times N \to N$ *são aplicações abertas.*

Com efeito, se $A \subset M \times N$ é aberto, então $A = \bigcup_\lambda U_\lambda \times V_\lambda$ com $U_\lambda \subset M$ e $V_\lambda \subset N$ abertos. Segue-se que $p_1(A) = \bigcup_\lambda p_1(U_\lambda \times V_\lambda) = \bigcup_\lambda U_\lambda$ é aberto em M. De maneira análoga se mostra que $p_2 \colon M \times N \to N$ é aberta.

Observação. Tanto a Proposição 5 como seu Corolário valem, evidentemente, para produtos cartesianos $M = M_1 \times \cdots \times M_n$ com um número finito qualquer de fatores.

3 Espaços topológicos

As considerações acima mostram que, até um certo ponto, o valor da distância entre dois pontos de um espaço métrico é irrelevante para efeito de estudar funções contínuas. O que realmente interessa é a coleção de abertos que a métrica determina. Isto conduz à seguinte definição.

Uma *topologia* num conjunto X é uma coleção $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X, chamados os *abertos* da topologia, com as seguintes propriedades:

1) $\varnothing$ e X pertencem a $\mathcal{T}$;
2) Se $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{T}$ então $A_1 \cap \cdots \cap A_n \in \mathcal{T}$;
3) Dada uma família arbitrária $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ com $A_\lambda \in \mathcal{T}$ para cada $\lambda \in L$, tem-se $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \in \mathcal{T}$.

Um *espaço topológico* é um par $(X, \mathcal{T})$ onde X é um conjunto e $\mathcal{T}$ é uma topologia em X. É comum fazer-se referência ao "espaço topológico X", deixando subentendida a topologia $\mathcal{T}$. Todo espaço métrico M pode ser considerado, de modo natural, como um espaço topológico, no qual a coleção $\mathcal{T}$ é formada pelos subconjuntos abertos de M, no sentido do §1 acima. Uma topologia $\mathcal{T}$ em X se diz *metrizável* quando existe uma métrica em X em relação à qual os

abertos são os elementos de $\mathcal{T}$. Duas métricas d_1 e d_2 sobre um conjunto M são equivalentes se, e somente se, elas determinam a mesma topologia em M.

Um espaço topológico X chama-se um *espaço de Hausdorff* quando, para cada par de pontos distintos x, y em X, existem abertos U, V tais que $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \varnothing$.

A Proposição 2 do Capítulo 1 mostra que todo espaço topológico metrizável é um espaço de Hausdorff.

Entre as topologias que se podem considerar num conjunto X, há duas que representam extremos opostos. Uma é a topologia *discreta*, onde se tomam *todas* as partes de X como conjuntos abertos. Nenhuma topologia sobre X pode, evidentemente, possuir mais abertos do que esta. O outro extremo é a topologia *caótica*, onde apenas $\varnothing$ e X são tomados como abertos. Se X tem mais de um elemento, a topologia caótica não é de Hausdorff. Outro exemplo de espaço topológico que não é de Hausdorff é obtido quando se toma um conjunto infinito X e se consideram abertos em X o conjunto vazio e os complementares das partes finitas. Então, se A e B são abertos não-vazios em X, temos $X-(A\cap B) = (X-A)\cup(X-B) \neq X$ pois X, sendo infinito, não é reunião de dois subconjuntos finitos. Segue-se que $A \cap B \neq \varnothing$, isto é, dois subconjuntos abertos não-vazios nunca são disjuntos. Isto contraria fortemente o axioma de Hausdorff.

Os exemplos acima são admitidamente artificiais. Eles ilustram a enorme variedade de situações patológicas a que pode conduzir a liberalidade dos axiomas de espaço topológico. Por isso nos restringimos ao caso de espaços metrizáveis. Em estudos mais aprofundados, há necessidade de considerar topologias que não provêm de métricas mas, num estágio introdutório, espaços métricos são suficientes. Eles têm a vantagem de darem lugar a muito menos patologias.

Entre espaços topológicos, uma aplicação $f\colon X \to Y$ se diz contínua quando, para cada $A' \subset Y$ aberto, sua imagem inversa $f^{-1}(A')$ é um aberto em X. Um homeomorfismo é uma bijeção contínua $h\colon X \to Y$ cuja inversa também é contínua.

4 Conjuntos fechados

Um ponto a diz-se *aderente* a um subconjunto X de um espaço métrico M quando $d(a, X) = 0$. Isto significa que existem pontos de X arbitrariamente próximos de a, ou seja, para cada $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $x \in X$ tal que $d(a, x) < \varepsilon$.

Outras maneiras equivalentes de dizer que a é aderente a X são:

1) para todo $\varepsilon > 0$, tem-se $B(a; \varepsilon) \cap X \neq \varnothing$;
2) para todo aberto A contendo a, tem-se $A \cap X \neq \varnothing$;
3) toda vizinhança de a tem pontos em comum com X.

Exemplo 14. Todo ponto $a \in X$ é aderente a X. Além disso, os pontos da fronteira ∂X também são aderentes a X. Por exemplo, se $X = [0, 1)$ na reta $\mathbb{R}$, então 1 é aderente a X.

O *fecho* (ou *aderência*) de um conjunto X num espaço métrico M é o conjunto $\overline{X}$ dos pontos de M que são aderentes a X. Portanto, escrever $a \in \overline{X}$ é o mesmo que afirmar que o ponto a é aderente a X em M.

Tem-se $\overline{\varnothing} = \varnothing$, $\overline{M} = M$ e $X \subset \overline{X}$ para todo $X \subset M$. É também claro que $X \subset Y \Rightarrow \overline{X} \subset \overline{Y}$.

Exemplo 15. Como $a \in \overline{X} \Leftrightarrow d(a, X) = 0$, segue-se do Exemplo 24, Capítulo 1, que, num espaço vetorial normado E, o fecho da bola aberta $B(a; r)$ é a bola fechada $B[a; r]$. Isto não é verdade, porém em todo espaço métrico M. Pode-se garantir sempre que $\overline{B(a; r)} \subset B[a; r]$, porque se $d(c, a) > r$ então, pondo $s = d(c, a) - r$, sabemos que $d(x, c) > s$ para todo $x \in B(a; r)$, e portanto c não é aderente a $B(a; r)$. (Vide Exemplo 5, acima.) Mas se tomarmos $M = [0, 1] \cup \{2\}$, temos $\overline{B(0; 2)} = [0, 1]$, $B(0; 2) = [0, 1]$ e $B[0; 2] = M$.

Para que *a não seja* aderente a X é necessário e suficiente que exista uma bola aberta de centro a, na qual não há pontos de X. Ou seja $a \notin \overline{X} \Leftrightarrow a \in \operatorname{int}(M - X)$. Podemos então escrever: $M - \overline{X} = \operatorname{int}(M - X)$, ou $\complement \overline{X} = \operatorname{int} \complement X$. Lembrando a decomposição $M = (\operatorname{int} X) \cup \partial X \cup \operatorname{int}(M - X)$, reunião disjunta, concluímos que $\overline{X} = (\operatorname{int} X) \cup \partial X$ (reunião disjunta).

Um subconjunto $X \subset M$ diz-se *denso em* M quando $\overline{X} = M$, ou seja, quando toda bola aberta em M contém algum ponto de X, ou ainda, para cada aberto não-vazio A em M, tem-se $A \cap X \neq \varnothing$.

Exemplo 16. O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é denso em $\mathbb{R}$. Também o conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, dos números irracionais, é denso na reta. Com efeito, todo intervalo aberto contém números racionais e números irracionais. Se $X \subset M$ e $Y \subset N$ são subconjuntos densos, então $X \times Y$ é denso no produto cartesiano $M \times N$. Com efeito, todo aberto não-vazio $A \subset M \times N$ contém um aberto da forma $U \times V$, onde $U \subset M$ e $V \subset N$ são abertos não-vazios. (Cfr. Proposição 5.) Sendo X denso em M e Y denso em N, existem pontos $x \in U \cap X$ e $y \in V \cap Y$. Então o ponto $z = (x, y)$ pertence a $(U \times V) \cap (X \times Y)$ e portanto $z \in A \cap (X \times Y)$. Isto prova que $X \times Y$ é denso em $M \times N$. O mesmo argumento vale para um produto de n fatores. Em particular, o conjunto $\mathbb{Q}^n$ dos vetores $x = (x_1, \ldots, x_n)$ cujas coordenadas são números racionais é denso no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Também é denso em $\mathbb{R}^n$ o conjunto dos vetores cujas coordenadas são todas irracionais.

Proposição 6. *Para todo ponto a e todo subconjunto não-vazio X num espaço métrico M, tem-se $d(a, X) = d(a, \overline{X})$.*

Demonstração. Como $X \subset \overline{X}$, temos $d(a, \overline{X}) \leq d(a, X)$. Para provar que não vale o sinal $<$, mostraremos que $d(a, \overline{X}) < m \Rightarrow d(a, X) < m$. Com efeito, se $d(a, \overline{X}) < m$, então existe $\overline{x} \in \overline{X}$ tal que $d(a, \overline{x}) < m$. Sento $\overline{x}$ aderente a X, existe $x \in X$ tal que $d(x, \overline{x}) < m - d(a, \overline{x})$. Então a desigualdade do triângulo nos dá:

$$d(a, X) \leq d(a, x) \leq d(a, \overline{x}) + d(\overline{x}, x) < d(a, \overline{x}) + m - d(a, \overline{x}) = m,$$

como queríamos demonstrar.

Corolário. *Para todo subconjunto $X \subset M$, tem-se $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$.*

Com efeito $a \in \overline{\overline{X}} \Rightarrow d(a, \overline{X}) = 0 \Rightarrow d(a, X) = 0 \Rightarrow a \in \overline{X}$.

Diz-se que um conjunto $F \subset M$ é *fechado* no espaço métrico M quando seu complementar $M - F$ é aberto em M. A proposição seguinte relaciona este conceito com o de aderência.

Proposição 7. *Dado $F \subset M$, tem-se $\overline{F} = F$ se, e somente se, $M - F$ é aberto. Em outras palavras: um conjunto é fechado se, e somente se, contém todos os seus pontos aderentes.*

Demonstração. Temos:

$$
\begin{aligned}
\overline{F} = F \Leftrightarrow\ & \text{os pontos que não pertencem a } F \text{ não são aderentes a } F;\\
\Leftrightarrow\ & \text{para todo } a \in M - F, \text{ existe uma bola aberta } B(a;r)\\
& \text{que não contém pontos de } F;\\
\Leftrightarrow\ & \text{para todo } a \in M - F, \text{ existe } r > 0 \text{ tal que } B(a;r) \subset M - F;\\
\Leftrightarrow\ & M - F \text{ é aberto.}
\end{aligned}
$$

Corolário. *Para todo $X \subset M$, seu fecho $\overline{X}$ é um conjunto fechado.*

$\overline{X}$ é menor subconjunto fechado de M que contém X, no seguinte sentido: se F é fechado e $X \subset F$ então $\overline{X} \subset F$. De fato, $X \subset F$ implica $\overline{X} \subset \overline{F}$, ou seja, $\overline{X} \subset F$.

Negar que um subconjunto $X \subset M$ seja fechado significa admitir a existência de algum ponto $a \notin X$ que seja aderente a X. Ou seja, $a \notin X$ mas para cada $\varepsilon > 0$ tem-se $B(a;\varepsilon) \cap X \neq \varnothing$. Um tal ponto pertence à fronteira de X. Logo, X é fechado se, e somente se, $X \supset \partial X$.

Exemplo 17. "Fechado" não é o contrário de "aberto". Quando um conjunto não é fechado, não se pode concluir daí que ele seja aberto. Por exemplo, o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais não é fechado nem aberto em $\mathbb{R}$. Há mesmo casos de conjuntos que são ao mesmo tempo fechados e abertos: o vazio e o espaço inteiro são exemplos óbvios disto. Outro exemplo é o seguinte. No espaço $M = \mathbb{R} - \{0\}$, com a métrica induzida da reta, cada um dos conjuntos $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$ é aberto. Como cada um deles é o complementar do outro (em M!), segue-se que eles são também fechados. Num espaço discreto, todo subconjunto é aberto e (como seu complementar é aberto) fechado. No espaço $\mathbb{Q}$ (números racionais, com a métrica $|x - y|$, induzida de $\mathbb{R}$), o intervalo aberto $(\sqrt{2}, \pi) = \{r \in \mathbb{Q}; \sqrt{2} < r < \pi\}$, além de ser um subconjunto aberto, é também fechado, pois seu complementar (em $\mathbb{Q}$) é o conjunto aberto $(-\infty, \sqrt{2}) \cup (\pi, +\infty)$.

Exemplo 18. Num espaço métrico M, toda bola fechada $B[a;r]$ é um subconjunto fechado de M, pois seu complementar é aberto. (Vide Exemplos 5 e 11.)

Exemplo 19. A fronteira ∂X de qualquer conjunto $X \subset M$ é um subconjunto fechado de M. Basta observar que o complementar de ∂X é o aberto $(\operatorname{int} X) \cup \operatorname{int}(M - X)$.

Exemplo 20. Todo subconjunto finito $F = \{a_1, \ldots, a_n\} \subset M$ é fechado em M. Com efeito, se $a \notin F$ então $d(a, F)$ é o menor dos números $d(a, a_1), \ldots, d(a, a_n)$ e portanto $d(a, F) > 0$. Em particular todo ponto $a \in M$ é um subconjunto fechado de M.

Proposição 8. *Os subconjuntos fechados de um espaço métrico M gozam das seguintes propriedades:*

1) *o conjunto vazio $\varnothing$ e o espaço inteiro M são fechados;*
2) *a reunião $F = F_1 \cup \cdots \cup F_n$ de um número finito de subconjuntos fechados $F_1, \ldots, F_n \subset M$ é um subconjunto fechado de M;*
3) *a interseção $F = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$ de uma família qualquer $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ (finita ou infinita) de subconjuntos fechados $F_\lambda \subset M$ é um subconjunto fechado de M.*

Demonstração. Usaremos a Proposição 2 e passagem aos complementares. 1) é evidente. Quanto a 2), os conjuntos $A_1 = \complement F_1, \ldots, A_n = \complement F_n$ são abertos em M. Desse modo, $A_1 \cap \cdots \cap A_n = \complement F_1 \cap \cdots \cap \complement F_n = \complement(F_1 \cup \cdots \cup F_n)$ é aberto e portanto $F_1 \cup \cdots \cup F_n$ é fechado em M. Para provar 3), ponhamos $A_\lambda = \complement F_\lambda$ para cada $\lambda \in L$. Então cada A_λ é aberto e portanto sua reunião $\cup A_\lambda = \cup \complement F_\lambda = \complement(\cap F_\lambda)$ é um aberto em M. Segue-se que $\cap F_\lambda$ é fechado.

Proposição 9. *Sejam M, N espaços métricos. A fim de que uma aplicação $f \colon M \to N$ seja contínua, é necessário e suficiente que a imagem inversa $f^{-1}(F')$ de todo subconjunto fechado $F' \subset N$ seja um subconjunto fechado de X.*

Demonstração. Isto resulta da Proposição 3, por passagem ao complementar. Seja $f \colon M \to N$ contínua. Dado $F' \subset N$ fechado, $\complement F'$ é aberto, donde $f^{-1}(\complement F') = \complement f^{-1}(F')$ é aberto, isto é, $f^{-1}(F')$ é fechado. Reciprocamente, se a imagem inversa de todo fechado em N é um fechado em M então, dado $A' \subset N$ aberto, $f^{-1}(\complement A') =$

$\complement f^{-1}(A')$ é fechado em M, donde $f^{-1}(A')$ é aberto e, pela Proposição 3, f é contínua.

Corolário 1. *Seja $f\colon M \to N$ uma bijeção. A fim de que f seja um homeomorfismo, é necessário e suficiente que f induza uma bijeção entre os subconjuntos fechados de M e os de N, isto é: para cada $X \subset M$, sua imagem $f(X)$ é fechada em N se, e somente se, X é fechado em M.*

Corolário 2. *Se $F_1 \subset M_1, \dots, F_n \subset M_n$ são subconjuntos fechados, então $F_1 \times \cdots \times F_n$ é fechado em $M_1 \times \cdots \times M_n = M$.*

Com efeito, as projeções $p_1\colon M \to M_1, \dots, p_n\colon M \to M_n$ são contínuas. Logo $F_1 \times \cdots \times F_n = p_1^{-1}(F_1) \cap \cdots \cap p_n^{-1}(F_n)$ é fechado em M, em virtude da Proposição 9 e do item 3) da Proposição 8.

Corolário 3. *Seja $(f_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma família (finita ou não) de funções contínuas $f_\lambda\colon M \to \mathbb{R}$, definidas no espaço métrico M. O conjunto dos pontos $x \in M$ tais que $f_\lambda(x) \geq 0$ para todo $\lambda \in L$ é fechado em M.*

Com efeito, esse conjunto é a interseção das imagens inversas $f_\lambda^{-1}\big([0, +\infty)\big)$, as quais são conjuntos fechados pois a semi-reta $[0, +\infty)$ é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}$.

Corolário 4. *O gráfico de uma aplicação contínua $f\colon M \to N$ é um subconjunto fechado de $M \times N$. Em particular, a diagonal $\Delta = \{(x, y) \in M \times N; x = y\}$ é um subconjunto fechado de $M \times M$.*

Já sabemos que $G(f) = \{(x, y) \in M \times N; y = f(x)\}$. A função $\varphi\colon M \times N \to \mathbb{R}$, definida por $\varphi(x, y) = d(f(x), y)$ é evidentemente contínua e $G(f) = \{(x, y) \in M \times N; \varphi(x, y) = 0\}$. Logo $G(f)$ é fechado em $M \times N$. A diagonal $\Delta \subset M \times M$ é o gráfico da aplicação identidade $M \to M$, logo é um subonjunto fechado de $M \times M$.

Exemplo 21. A projeção de um conjunto fechado $F \subset M_1 \times \cdots \times M_n$ num dos fatores pode não ser um conjunto fechado. Por exemplo, seja $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \cdot y = 1\}$. Então $F = m^{-1}(1)$, onde $m\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a multiplicação de números reais. Como m é contínua e $\{1\} \subset \mathbb{R}$ é fechado, segue-se que F é um subconjunto fechado do plano (uma hipérbole). Mas sua projeção $p_1(F) = \mathbb{R} - \{0\}$ não é um subconjunto fechado da reta.

Exemplo 22. A reunião de uma família infinita de fechados pode não ser um conjunto fechado. Com efeito, todo conjunto é reunião de seus pontos, que são conjuntos fechados.

Exemplo 23. Em todo espaço métrico M, a esfera $S(a;r) = \{x \in M; d(a,x) = r\}$ é um subconjunto fechado, como imagem inversa do fechado $\{r\} \subset \mathbb{R}$ pela função contínua $d_a \colon M \to \mathbb{R}$, $d_a(x) = d(a,x)$. O conjunto dos pontos em que uma função real contínua assume um certo valor constante é o que se chama uma "superfície de nível" da função. É um subconjunto fechado do domínio da função.

Exemplo 24. O conjunto $\mathcal{C}_0(M;N)$ das aplicações contínuas limitadas $f \colon M \to N$ é um subconjunto fechado do espaço $\mathcal{B}(M;N)$, formado por todas as aplicações limitadas de M em N. Mais geralmente, dada qualquer $f \colon M \to N$, o conjunto $\mathcal{C}_f(M;N)$ das funções contínuas de M em N que estão a uma distância finita de f é um subconjunto fechado do espaço $\mathcal{B}_f(M;N)$. (Vide Exemplo 10.) Se fixamos um ponto $a \in M$, também é fechado em $B_f(M;N)$ o conjunto F_a formado pelas aplicações $g \colon M \to N$ que estão a uma distância finita de f e são contínuas no ponto a.

As noções de fecho e conjunto fechado, como as demais introduzidas neste capítulo, são relativas, isto é, dizem respeito a um espaço ambiente. Assim, por exemplo, se $M = [0,1)$ e $X = (1/2, 1)$ então o fecho de X em M é $[1/2, 1)$ enquanto o fecho de X em $\mathbb{R}$ é $[1/2, 1]$. Por isso mesmo, $[1/2, 1)$ é um subconjunto fechado de M mas não é fechado na reta.

A relação entre o fecho num subespaço e o fecho no espaço todo é esclarecida pela

Proposição 10. *Seja S um subespaço do espaço métrico M. Dado um subconjunto $X \subset S$, indiquemos com $\widetilde{X}$ o fecho de X em S e com $\overline{X}$ o fecho de X em M. Então $\widetilde{X} = \overline{X} \cap S$.*

Demonstração. Se $a \in S$, então a distância $d(a,X) = \inf\{d(a,x); x \in X\}$ é a mesma, quer consideremos X como subconjunto de S, quer de M. Então

$$\widetilde{X} = \{a \in S; d(a,X) = 0\} = \{a \in M; d(a,X) = 0\} \cap S = \overline{X} \cap S.$$

Corolário 1. *Se S é fechado em M, então, para todo $X \subset S$, tem-se $\widetilde{X} = \overline{X}$.*

Com efeito, $X \subset S \Rightarrow \overline{X} \subset S$ (pois $\overline{S} = S$) $\Rightarrow \overline{X} = \overline{X} \cap S = \widetilde{X}$.

Corolário 2. *Os subconjuntos fechados do subespaço S são as interseções $F \cap S$, dos fechados $F \subset M$ com o subespaço S.*

Com efeito, dado $X \subset S$, tem-se $\widetilde{X} = X \Leftrightarrow X = \overline{X} \cap S \Leftrightarrow X = F \cap S$, com $F = \overline{X}$.

Em particular, quando S é fechado em M, um conjunto $X \subset S$ é fechado em S se, e somente se, é fechado em M.

Proposição 11. *Seja $M = F_1 \cup F_2$ onde F_1 e F_2 são fechados em M. Se $f\colon M \to N$ é tal que suas restrições $f_1 = f|F_1$ e $f_2 = f|F_2$ são contínuas, então f é contínua.*

Demonstração. Dado $H \subset N$ fechado, temos $f^{-1}(H) = f_1^{-1}(H) \cup f_2^{-1}(H)$. Pela Proposição 9, $f_1^{-1}(H)$ é fechado em F_1, e portanto fechado em M. Analogamente, $f_2^{-1}(H)$ é fechado em M. Logo $f^{-1}(H)$ é fechado em M e portanto f é contínua, ainda em virtude da Proposição 9.

Corolário. *Sejam $f\colon [a,b] \to N$ e $g\colon [b,c] \to N$ contínuas, com $f(b) = g(b)$. Então $h\colon [a,c] \to N$, definida por $h(t) = f(t)$ se $a \le t \le b$ e $h(t) = g(t)$ se $b \le t \le c$, é uma aplicação contínua.*

Observação. A Proposição 11 seria ainda válida se tomássemos F_1 e F_2 abertos. (Vide Exercício adiante.) Mas seria falsa se nada admitissemos sobre F_1 e F_2. Por exemplo, $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$, definida por $f(t) = 0$ se $t \in [0,1]$ e $f(t) = 1$ se $t \in (1,2]$ é descontínua embora $f|[0,1]$ e $f|(1,2]$ sejam contínuas.

Seja X um subconjunto do espaço métrico M. Um ponto $a \in M$ chama-se *ponto de acumulação* de X quando toda bola de centro a contém algum ponto de X, *diferente do ponto a.* Indicaremos com a notação X' o conjunto dos pontos de acumulação de X em M. O conjunto X' chama-se *derivado* do conjunto X.

Assim $a \in X' \Leftrightarrow a \in \overline{X - \{a\}}$.

Se toda bola de centro a contém uma infinidade de pontos de X então, evidentemente, algum deles é diferente de a. Então $a \in X'$. Reciprocamente, se $a \in X'$ então toda bola de centro a contém uma infinidade de pontos de X. Com efeito, dada $B(a;r)$, existe $x_1 \neq a$ tal que $x_1 \in X \cap B(a;r)$. Seja $r_1 = d(a,x_1)$. Existe $x_2 \neq a$ tal que $x_2 \in X \cap B(a,r_1)$. Ponhamos $r_2 = d(a,x_2)$. Temos

$0 < r_2 < r_1$. Existe $x_3 \neq a$, $x_3 \in X \cap B(a; r_2)$. Pondo $r_3 = d(a, x_3)$, temos $0 < r_3 < r_2 < r_1$. Isto mostra que x_1, x_2, x_3 são pontos diferentes uns dos outros. Prosseguindo analogamente, obtemos uma infinidade de pontos $x_1, x_2, \ldots$ pertencentes a X e contidos na bola inicial $B(a; r)$.

Para todo subconjunto finito $F \subset M$, tem-se $F' = \varnothing$.

Exemplo 25. Na reta $\mathbb{R}$, tomemos $X = \mathbb{Q}$, $Y = \mathbb{Z}$, $U = [0, 1]$, $V = \{0, 1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots\}$, $W = \{(1 + 1/n)^n; n = 1, 2, \ldots\}$. Então $X' = \mathbb{R}$, $Y' = \varnothing$, $U' = U$, $V' = \{0\}$ e $W' = \{e\}$. Temos $X' \supset X$, $Y' \subset Y$, $U' = U$, $V' \subset V$ e $W' \not\subset W \not\supset W'$.

Dado $X \subset M$, tem-se $\overline{X} = X \cup X'$ (reunião não necessariamente disjunta). Com efeito, se $a \in \overline{X}$, ou $a \in X$ ou $a \notin X$ e então toda bola de centro a contém um ponto $x \in X$, o qual é necessariamente $\neq a$, e portanto $a \in X'$.

EXERCÍCIOS DO CAPÍTULO 3

§1

1. A fronteira de um conjunto aberto tem interior vazio. Reciprocamente, todo subconjunto fechado $X \subset M$ com interior vazio é fronteira de algum aberto em M. (Ver §4.)

2. Se um conjunto e seu complementar têm ambos interior vazio então a fronteira de cada um deles é o espaço inteiro.

3. Seja M um espaço métrico. Dado $x \in M$, vale:

   (a) Todo conjunto que contém uma vizinhança de x é ainda uma vizinhança de x;

   (b) A interseção de um número finito (ou a reunião de uma família qualquer) de vizinhanças de x é ainda uma vizinhança de x.

4. Num espaço vetorial normado E, prove que todo subespaço vetorial $F \neq E$ tem interior vazio. Conclua que, para todo $a \in E$, a variedade afim $a + F = \{a + x; x \in F\}$ tem interior vazio.

5. Seja $X \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ o conjunto das funções limitadas que são descontínuas em todos os pontos da reta. Mostre que X não é aberto em $\mathcal{B}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

6. Seja E um espaço vetorial normado. Se $X \subset E$ é convexo, então $\operatorname{int} X$ é convexo. (Vide pág. 101.)

7. Seja $\mathcal{C}^1[a,b]$ o espaço vetorial das funções *de classe* C^1, isto é, funções $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ que possuem derivada contínua, munido da norma $||f||_1 = \sup\limits_{x\in[a,b]} (|f(x)| + |f'(x)|)$. Seja D o conjunto das funções $f \in \mathcal{C}^1[a,b]$ tais que $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Cada $f \in D$ chama-se um difeomorfismo de classe C^1.

   Prove:

   1º) Toda $f \in D$ é uma bijeção monótona de $[a,b]$ sobre um intervalo $[c,d]$ e $f^{-1} \in \mathcal{C}^1[c,d]$.

   2º) D é aberto em $\mathcal{C}^1[a,b]$.

8. Seja $H \subset \mathcal{C}^1[a,b]$ formado pelas funções $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 que são injetivas. Cada $h \in H$ é, portanto um homeomorfismo (de classe C^1) sobre algum intervalo da reta. Dada $h \in H$, se existir algum $x \in [a,b]$ tal que $h'(x) = 0$, mostre que h não é um ponto interior a H em $\mathcal{C}^1[a,b]$. Em particular, $H \subset \mathcal{C}^1[a,b]$ não é aberto.

9. Todo aberto não-vazio $A \subset \mathbb{R}^m$ contém pelo menos um ponto $x = (x_1, \ldots, x_m)$ cujas coordenadas são racionais. Concluir que se $\mathcal{C}$ é uma coleção de abertos não-vazios dois a dois disjuntos em $\mathbb{R}^m$ então $\mathcal{C}$ é enumerável.

10. Seja X bem ordenado em relação à ordem natural da reta. (Isto significa que todo subconjunto não-vazio de X possui primeiro elemento.) Então X é enumerável.

11. Seja $\mathcal{C}$ o conjunto das funções contínuas $f\colon [a,b] \to [a,b]$, com a métrica do sup. O subconjunto de $\mathcal{C}$ formado pelas funções que não são sobrejetivas é aberto.

12. Seja $\mathcal{C}$ o conjunto das funções contínuas $f\colon [a,b] \to [a,b]$, com a métrica do sup. O conjunto dos homeomorfismos $h\colon [a,b] \to [a,b]$ tem interior vazio em $\mathcal{C}$.

13. Seja X não-enumerável. O conjunto das funções injetivas $f\colon X \to \mathbb{R}$ tem interior vazio em $\mathcal{B}(X;\mathbb{R})$.

14. Seja $M = X \cup Y$. Se um subconjunto $S \subset M$ é aberto em $S \cup X$ e em $S \cup Y$ então S é aberto em M. Conclua que se $S \subset M - X$ é aberto em $M - X$ e em $S \cup X$ então S é aberto em M. Enuncie e demonstre resultados análogos com "fechado" em lugar de "aberto". (Vide §4.)

15. Seja $S = (\mathbb{R}^2 - S^1) \cup \{(1,0)\}$. Mostre que, para toda reta r em $\mathbb{R}^2$ tem-se $r \cap S$ aberto em r mas S não é aberto em $\mathbb{R}^2$.

16. Não é verdade que $X \subset Y \Rightarrow \partial X \subset \partial Y$. Entretanto, tem-se $\partial(\operatorname{int} S) \subset \partial S$.

17. Seja M um espaço métrico com a seguinte propriedade: para toda imersão isométrica $f\colon M \to N$, a imagem $f(M)$ é um aberto em N. Prove que M é vazio.

18. Um *grupo metrizável* é um espaço métrico G, munido de uma estrutura de grupo tal que as operações $m\colon G\times G \to G$, $m(x,y) = x\cdot y$ e $f: G \to G$, $f(x) = x^{-1}$, são contínuas. Prove:

    (a) Seja G um espaço métrico com estrutura de grupo. G é um grupo metrizável se, e somente se a aplicação $q\colon G \times G \to G$, $q(x,y) = x \cdot y^{-1}$, for contínua.

    (b) Todo subgrupo de um grupo metrizável é um grupo metrizável. Idem para o produto cartesiano de dois grupos metrizáveis.

    (c) O grupo aditivo de um espaço vetorial normado (em particular, $\mathbb{R}^n$), o grupo multiplicativo S^1 dos complexos de módulo 1, idem dos reais $\neq 0$, o grupo das matrizes reais $n \times n$ invertíveis, são grupos metrizáveis.

    (d) Num grupo metrizável G, para cada $a \in G$ a translação à esquerda $\lambda_a\colon G \to G$, $\lambda_a(x) = a \cdot x$, e a translação à direita $\delta_a\colon G \to G$, $\delta_a(x) = x \cdot a$, são homeomorfismos. Conclua que todo grupo metrizável é topologicamente homogêneo.

    (e) Todo subgrupo aberto de um grupo metrizável é também fechado. Recíproca falsa. (Vide §4.)

19. Num grupo metrizável, toda vizinhança U do elemento neutro e contém uma vizinhança $V \ni e$ tal que $V \cdot V^{-1} \subset U$, onde $V \cdot V^{-1} = \{x \cdot y^{-1};\ x \in V, y \in V\}$. Uma vizinhança $V \ni e$ diz-se *simétrica* quando $V = V^{-1}$, onde $V^{-1} = \{x^{-1}; x \in V\}$. Mostre que toda vizinhança de e contém uma vizinhança simétrica.

20. Num grupo metrizável, as vizinhanças de um ponto x são os conjuntos da forma $V \cdot x = \{v \cdot x; v \in V\}$ onde V é uma vizinhança do elemento neutro e. (Análogo resultado vale com $x \cdot V$ em vez de $V \cdot x$.)

21. Seja G um grupo metrizável. Dados $A, B \subset G$, seja $A \cdot B = \{x \cdot y \in G;\ x \in A, y \in B\}$. Mostre que se A ou B é aberto em G então $A\cdot B$ é aberto. Se escrevermos $V^{-1} = \{x^{-1}.x \in V\}$, mostre que toda vizinhança U do elemento neutro $e \in G$ contém uma vizinhança V de e tal que $V^{-1} = V$ e $V \cdot V \subset U$.

22. Um grupo metrizável é discreto se, e somente se, seu elemento neutro é um ponto isolado.

23. Sejam G, H grupos metrizáveis. Um homomorfismo $f\colon G \to H$ é contínuo se, e somente se, é contínuo no elemento neutro $e \in G$.

24. Dados $A \subset M$ e $B \subset N$, tem-se $\operatorname{int}(A \times B) = \operatorname{int} A \times \operatorname{int} B$ e $\partial(A \times B) = (\partial A \times B) \cup (A \times \partial B)$ em $M \times N$.

§2

25. Seja $f\colon M \to N$ contínua. Dados um subconjunto arbitrário $X \subset M$ e um aberto V em N, com $f(X) \subset V$, prove que existe $U \supset X$ aberto em M tal que $f(U) \subset V$.

26. A fim de que uma função $f\colon M \to \mathbb{R}$ seja contínua, é necessário e suficiente que, para todo $a \in \mathbb{R}$, sejam abertos em M os conjuntos $X_a = \{x \in M; f(x) < a\}$ e $Y_a = \{x \in M; f(x) > a\}$.

27. Seja $(X_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma família de subconjuntos de M tais que $\bigcup\limits_{\lambda \in L} \mathrm{int} X_\lambda = M$. Se $f\colon M \to N$ é tal que $f|X_\lambda$ é contínua para cada $\lambda \in L$, então f é contínua.

28. Seja $\xi_X\colon M \to \mathbb{R}$ a *função característica* de um subconjunto $X \subset M$. (Temos $\xi_X(x) = 1$ se $x \in X$ e $\xi_X(x) = 0$ se $x \notin X$.) O conjunto dos pontos de descontinuidade de ξ_λ é a fronteira de X em M.

29. Seja A o conjunto de todas as r-listas $(v_1, \ldots, v_r)$ de vetores linearmente independentes $v_i \in \mathbb{R}^m$. Mostre que A é um subconjunto aberto de $(\mathbb{R}^m)^r$.

30. Dada uma função real contínua $f\colon M \to \mathbb{R}$, considere o aberto $A = \{x \in M; f(x) > 0\}$. Mostre que, para todo $x \in \partial A$, tem-se $f(x) = 0$. Dê exemplo em que se tenha $f(x) = 0$ com $x \notin \partial A$.

31. Dê exemplo de uma sobrejeção contínua aberta $f\colon M \to N$ e de um subconjunto $X \subset M$ tal que a restrição $f|X\colon X \to N$ seja sobrejetiva porém não aberta.

32. Seja $\varphi\colon M \to N$ uma sobrejeção contínua e aberta. Uma aplicação $f\colon N \to P$ é contínua se, e somente se, a composta $f \circ \varphi\colon M \to P$ é contínua. (Resultado análogo vale com "fechada" em vez de "aberta". Vide Ex. 46.)

33. Uma aplicação $f\colon M \to N$ é contínua se, e somente se, para todo $Y \subset N$, tem-se $f^{-1}(\mathrm{int}\, Y) \subset \mathrm{int}\, f^{-1}(Y)$.

34. Dados $X, Y \subset M$, tem-se $\mathrm{int}(X \cap Y) = (\mathrm{int}\, X) \cap (\mathrm{int}\, Y)$ e $\mathrm{int}(X \cup Y) \supset \mathrm{int}\, X \cup \mathrm{int}\, Y$. Dê exemplo em que esta inclusão não se reduz a uma igualdade.

35. Uma função real $f\colon M \to \mathbb{R}$ diz-se *semicontínua inferiormente* no ponto $a \in M$ quando, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta \Rightarrow f(a) - \varepsilon < f(x)$. Formule definição análoga para *semicontinuidade superior.* Prove que se f e g são semicontínuas inferiormente no ponto a, o mesmo ocorre com $f + g$ e $c \cdot f$, caso $c > 0$. Se for $c < 0$ então $c \cdot f$ será semicontínua superiormente. Prove que $f\colon M \to \mathbb{R}$ é semicontínua inferiormente (em todos os pontos de M) se, e somente se, para todo $b \in \mathbb{R}$, o conjunto $f^{-1}((b, +\infty))$ é aberto em M. Conclua que um subconjunto $A \subset M$ é aberto se, e somente se, sua função característica $\xi_A\colon M \to \mathbb{R}$ ($\xi_A(x) = 1$ se $x \in A$ e $= 0$ se $x \notin A$) é semicontínua inferiormente.

36. Seja $f\colon M \to \mathbb{R}$ semicontínua inferiormente, com $f(x) > 0$ para todo $x \in M$. Prove que $g\colon M \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \frac{1}{f(x)}$, é semicontínua superiormente.

37. Analise a semicontinuidade das seguintes funções $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em cada ponto.

    (a) $f(x) = x^{-n}$ se $x \neq 0$, $f(0) = 0$. (Aqui $n \in \mathbb{N}$.)

    (b) $f(x) = 0$ se x é racional, $f(x) = 1$ se x é irracional.

    (c) $f(x) = \varphi(g(x))$, onde $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é semicontínua e $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua crescente.

    (d) $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, onde $g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são semicontínuas inferiormente e positivas em cada $x \in \mathbb{R}$.

37a. Seja $f\colon M \to \mathbb{R}$ semicontínua inferiormente. Se $X \subset M$ é tal que $f(x) < a$ para todo $x \in X$ então $f(x) \leq a$ para todo $x \in \overline{X}$. Estabeleça um resultado análogo para funções semicontínuas superiormente.

38. Dada $f\colon M \to N$, definamos a *oscilação de f no ponto $a \in M$* pondo $\omega_f(a) = \inf\{\operatorname{diam} f(B(a;r)); r > 0\}$ se a imagem por f de alguma bola de centro a for limitada. Caso contrário, poremos $\omega_f(a) = +\infty$. Prove:

    (a) Para todo $c \leq +\infty$, $A_c = \{x \in M; \omega_f(x) < c\}$ é aberto em M.

    (b) $\omega_f(a) = 0 \Leftrightarrow f$ é contínua no ponto a.

    (c) Dada qualquer $f\colon M \to N$, o conjunto dos pontos de M nos quais f é contínua é a interseção de uma família enumerável de abertos $A_1, A_2, \ldots, A_n, \cdots \subset M$.

    (d) Para toda $f\colon M \to N$, a função real $\omega_f\colon M^* \to \mathbb{R}$, definida no conjunto M^* dos pontos $x \in M$ onde $\omega_f(x) < +\infty$, é semicontínua superiormente.

39. Seja $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ semicontínua inferiormente. Prove que f é limitada inferiormente e que existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) \leq f(x)$ para todo x em $[a, b]$. Seja $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 1/x$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. f é semicontínua inferiormente mas não é limitada. Estabeleça resultados análogos para a semicontinuidade superior.

§3

40. Uma coleção $\mathcal{V}$ de abertos de um espaço topológico X chama-se um *sistema fundamental de vizinhanças abertas* (SFVA) de um ponto $x \in X$ quando: i) todo $V \in \mathcal{V}$ contém x; ii) todo aberto A em X que contém x deve conter algum $V \in \mathcal{V}$. Prove que num espaço métrico, as bolas abertas $B(x; 1/n)$, $n \in \mathbb{N}$, formam um SFVA de x.

41. Indicaremos com $\mathcal{W}(\mathbb{R})$ o conjunto das funções contínuas $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, munido da *topologia fina de Whitney*, definida do seguinte modo: dadas $f \in \mathcal{W}(\mathbb{R})$ e uma função contínua positiva $\varepsilon\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, pomos $G(f;\varepsilon) = \{g \in \mathcal{W}(\mathbb{R}); |g(x) - f(x)| < \varepsilon(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}\}$. Em seguida, declaramos um subconjunto $A \subset \mathcal{W}(\mathbb{R})$ aberto quando, para toda $f \in A$, existe uma $\varepsilon\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ continua positiva tal que $B(f;\varepsilon) \subset A$. Prove:

    (a) Os abertos assim definidos constituem uma topologia em $\mathcal{W}(\mathbb{R})$.

    (b) O espaço $\mathcal{W}(\mathbb{R})$ assim obtido não é metrizável. (*Sugestão*: mostre que a função identicamente nula não possui um SFVA enumerável em $\mathcal{W}(\mathbb{R})$.

42. Sejam d e d' métricas em M, que determinam topologias $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ respectivamente. Mostre que d é mais fina do que d' se, e somente se, $\mathcal{T} \supset \mathcal{T}'$.

§4

43. Dados X, Y num espaço métrico M, tem-se $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$ e $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}$. Dê exemplo em que esta última inclusão não é igualdade.

44. Se $X \subset M$ e $Y \subset N$ então $\overline{X \times Y} = \overline{X} \times \overline{Y}$ em $M \times N$.

45. $f\colon M \to N$ é contínua se, e somente se, para todo $X \subset M$ tem-se $f(\overline{X}) \subset \overline{f(X)}$.

46. Uma aplicação $f\colon M \to N$ chama-se *fechada* quando para todo $F \subset M$ fechado, sua imagem $f(F)$ é fechada em N. Prove que $f\colon M \to N$ é fechada se, e somente se, para todo $y \in N$ e todo aberto $V \supset f^{-1}(y)$ em M existe $U \ni y$ aberto em N tal que $V \supset f^{-1}(U) \supset f^{-1}(y)$.

47. Uma aplicação $f\colon M \to N$ chama-se um *homeomorfismo local* quando, para cada $x \in M$, existe um aberto $U \ni x$ tal que $f|U$ é um homeomorfismo sobre um subconjunto aberto (!) de N. Prove:

    (a) Se $f\colon M \to N$ é um homeomorfismo local então, para todo $y \in N$, $f^{-1}(y)$ é um subconjunto fechado discreto de M.

    (b) Todo homeomorfismo local é uma aplicação contínua aberta.

    (c) Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto. Se $f\colon U \to N$ é um homeomorfismo local e algum ponto $y \in N$ tem imagem inversa $f^{-1}(y)$ infinita, então f não é uma aplicação fechada.

    (d) Pelo Teorema da Função Inversa, $f\colon \mathbb{R}^2 - \{0\} \to \mathbb{R}^2 - \{0\}$, dada por $f(z) = z^2$, é um homeomorfismo local. Neste caso, f é uma sobrejeção contínua, aberta e fechada. Mostre que, se $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0\}$ e $U = \mathbb{R}^2 - P$, então $f|U$ é um homeomorfismo local de U sobre $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, tal que a imagem inversa de cada ponto é finita, mas $f|U$ não é uma aplicação fechada.

(e) Seja $\varphi\colon M \to N$ um homeomorfismo local. Se $f, g\colon P \to M$ são contínuas e tais que $\varphi f = \varphi g\colon P \to N$ então o conjunto $A = \{x \in P \mid f(x) = g(x)\}$ é aberto (e fechado) em P.

(f) $\varphi\colon \mathbb{R} \to S^1$, dada por $\varphi(t) = e^{it}$, é um homeomorfismo local.

48. Dado qualquer subconjunto fechado $F \subset \mathbb{R}^n$, existe $X \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\partial X = F$.

49. Dada uma função $f\colon M \to \mathbb{R}$, seja $C(f) = \{(x, y) \in M \times \mathbb{R}; y \geq f(x)\}$. Prove que f é semicontínua inferiormente se, e somente se, $C(f)$ é um subconjunto fechado de $M \times \mathbb{R}$.

50. Dada uma família de funções $f_\lambda\colon M \to \mathbb{R}$, $\lambda \in L$, suponha que para cada $x \in M$ seja finito $f(x) = \sup\limits_{\lambda \in L} f_\lambda(x)$. Mostre que, com a notação do exercício anterior, temos $C(f) = \bigcap\limits_{\lambda \in L} C(f_\lambda)$. Conclua que se cada f_λ é semicontínua inferiormente então $f = \sup\limits_{\lambda \in L} f_\lambda$ também é semicontínua inferiormente.

51. Um subconjunto $F \subset M$ é fechado se, e somente se, sua função característica $\xi_F\colon M \to \mathbb{R}$ é semicontínua superiormente.

52. Seja E um espaço vetorial normado, Se $X \subset E$ é convexo, então $\overline{X}$ é convexo.

53. Seja E o espaço vetorial das funções contínuas $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Quer se tome em E a norma $||f|| = \sup\limits_{a \leq x \leq b} |f(x)|$ ou a norma $||f||_1 = \int_a^b |f(x)|dx$, o subconjunto $F = \{f \in E. \int_a^b f(x)dx = 0\}$ é um subespaço vetorial fechado de E.

54. Uma família $\mathcal{C} = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos de um espaço métrico M chama-se *localmente finita* quando cada ponto de M é centro de uma bola que intersecta apenas um número finito dos conjuntos C_λ.

(a) As bolas de centro 0 e raio inteiro em $\mathbb{R}^m$ não formam uma família localmente finita mas seus complementares sim;

(b) Obtenha uma família localmente finita de abertos cuja reunião seja $\mathbb{R}^m$;

(c) Se a família $\mathcal{C}$ é localmente finita em M então cada ponto de M pertence, no máximo, a um número finito de conjuntos C_λ, isto é, $\mathcal{C}$ é *pontualmente finita*. Dê exemplo, na reta, de uma família pontualmente finita de abertos, que não seja localmente finita;

(d) Seja $\mathcal{C} = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ localmente finita. Então $\overline{\cup C_\lambda} = \cup \overline{C}_\lambda$. Conclua que uma reunião localmente finita de fechados é ainda fechada.

(e) Seja $f\colon M \to N$ contínua. Se $(C_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família localmente finita em N então suas imagens inversas $f^{-1}(C_\lambda)$ formam uma família localmente finita em M.

(f) Seja $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma família localmente finita de fechados $F_\lambda \subset M$. Se $f\colon M \to N$ é tal que cada restrição $f|F_\lambda$ é contínua, então f é contínua.

55. Seja $A \subset M$ aberto. Se $X \subset M$ é denso em M, então $X \cap A$ é denso em A.

56. Existe uma função $f\colon [0,1] \to [0,1]$ cujo gráfico é denso no quadrado $[0,1] \times [0,1]$.

57. $A \subset M$ é aberto em M se, e somente se, $A \cap \overline{X} \subset \overline{A \cap X}$ para todo $X \subset M$.

58. Dê um exemplo na reta, em que A seja aberto e os três conjuntos $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$ e $\overline{A \cap B}$ sejam distintos.

59. Um subconjunto $X \subset M$ diz-se *localmente fechado* quando, para todo $x \in X$, existe um aberto $U \ni x$ tal que $U \cap X$ é fechado em U.

    (a) X é localmente fechado em $M \Leftrightarrow X$ é um subconjunto fechado de algum aberto de M.

    (b) $\mathbb{Q}$ não é localmente fechado em $\mathbb{R}$.

    (c) Todo aberto $A \subset M$ é localmente fechado.

    (d) Se $S \subset T \subset M$, com S localmente fechado em T e T localmente fechado em M, então S é localmente fechado em M.

    (e) $D = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 < 1\}$ é localmente fechado em $\mathbb{R}^3$.

60. Uma aplicação contínua $f\colon M \to M$ chama-se uma *retração* quando $f(f(x)) = f(x)$ para todo $x \in M$. Neste caso, o subconjunto $N = f(M)$ diz-se um *retrato* de M. Mostre que todo retrato é um subconjunto fechado de M. Exiba retrações de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$ e de $\mathbb{R}^n - \{0\}$ sobre S^{n-1}. Use Gram-Schmidt para obter uma retração $f\colon G(n) \to O(n)$, onde $G(n)$ é o conjunto das matrizes reais $n \times n$ invertíveis e $O(n)$ é o conjunto das matrizes $n \times n$ reais ortogonais.

61. Sejam $F, G \subset M$ fechados disjuntos e não-vazios. Mostre que existe $f\colon M \to [0,1]$ contínua tal que $f^{-1}(0) = F$ e $\overline{f}^{1}(G) = 1$. Conclua que existem abertos disjuntos $U, V \subset M$ tais que $F \subset U$ e $G \subset V$. (Vide Exercício 23, Capítulo 2, §2.)

62. Sejam $O(n)$ e $U(n)$ respectivamente, os conjuntos das matrizes $n \times n$ reais ortogonais e complexas unitárias. Mostre que $O(n) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ e $U(n) \subset \mathbb{C}^{n^2}$ são subconjuntos limitados e fechados. Por outro lado, se $Sl(\mathbb{R}^n)$ é o conjunto das matrizes reais $n \times n$ que possuem determinante 1, mostre que $Sl(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ é fechado mas não é limitado.

63. Se X é denso em M e $f\colon M \to N$ é uma aplicação contínua sobrejetiva, então $f(X)$ é denso em N.

64. O derivado (conjunto dos pontos de acumulação) de qualquer $X \subset M$ é um subconjunto fechado de M.

65. Todo subconjunto discreto $X \subset \mathbb{R}^n$ é enumerável. Mostre ainda que se $X \subset \mathbb{R}^n$ é não-enumerável então existe um ponto $a \in X$ tal que, para todo $r > 0$, tem-se $X \cap B(a, r)$ não-enumerável.

66. Seja E um espaço vetorial normado. Diz-se que um subespaço vetorial $F \subseteq E$ tem *codimensão* 1 quando, dados $x, y \in E$ existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ e $\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in F$. Prove que F tem codimensão 1 se, e somente se existe $f \colon E \to \mathbb{R}$ linear tal que $F = f^{-1}(0)$. Prove que se $F \subset E$ tem codimensão 1 então ou F é fechado em E ou é denso em E.

67. Uma bijeção $f \colon M \to N$ é um homeomorfismo se, e somente se, $f(\overline{X}) = \overline{f(X)}$ para todo $X \subset M$.

68. Seja X denso em M. M possui pontos isolados se, e somente se, X possui.

69. Certo ou errado? Se $f \colon M \to N$ é contínua e $X \subset N$ é denso então $f^{-1}(X)$ é denso em M.

70. Seja $(X_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma família de subconjuntos do espaço métrico M, com a seguinte propriedade: existe $\varepsilon > 0$ tal que $\lambda \neq \mu \Rightarrow d(X_\lambda, X_\mu) \geq \varepsilon$. Mostre que $\overline{\bigcup_{\lambda \in L} X_\lambda} = \bigcup_{\lambda \in L} \overline{X}_\lambda$.

71. Sejam $S \subset X$ conjuntos. Prove que $Z_S = \{f \colon X \to \mathbb{R}$ limitada; $f(S) = 0\}$ é um subconjunto fechado de $\mathcal{B}(X; \mathbb{R})$.

72. Se $X \subset M$ e $X \times N$ é um retrato de $M \times N$ então X é um retrato de M.

73. Para todo subconjunto $X \subset M$, $\operatorname{int} X \cup \operatorname{int}(M - X)$ é denso em M.

74. Dado $S \subset M$, seja $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ a família de todos os subconjuntos fechados de M que contêm S. Prove que $\overline{S} = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$.

75. Prove que $M - \operatorname{int}(S) = \overline{M - S}$ e $M - \overline{S} = \operatorname{int}(M - S)$ para todo $S \subset M$.

76. Se um conjunto aberto A é disjunto de S então A é disjunto do fecho de S.

77. Na notação do Exercício 22, Capítulo 1, mostre que, para todo $X \subset M$, tem-se $\overline{X} = \bigcap_{n=1}^{\infty} B\left[X; \frac{1}{n}\right]$.

78. Seja M um espaço métrico que contém um subconjunto enumerável E, denso em M. Prove que para todo $S \subset M$ existe um subconjunto enumerável $E_1 \subset S$, denso em S. (*Sugestão*: forme E_1 escolhendo, em cada bola de centro num ponto de E e raio racional, um ponto de S, caso exista.)

79. Sejam M um espaço métrico e $X \subset M$ um subconjunto não-fechado. Mostre que existe uma função contínua $f: X \to \mathbb{R}$ que não admite extensão contínua $\varphi: M \to \mathbb{R}$. (*Sugestão*: tome $x_0 \in \overline{X} - X$ e observe que $x \mapsto d(x, x_0)$ é uma função que não se anula para $x \in X$.)

80. Sejam $f, g: M \to \mathbb{R}$ semicontínuas inferiormente e superiormente (nesta ordem). Então $F = \{x \in M; f(x) \leq g(x)\}$ é fechado em M.

81. Dada uma função contínua $f: X \to \mathbb{R}$, cujo domínio é um subconjunto fechado $X \subset \mathbb{R}$, mostre que existe $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua tal que $\varphi|X = f$. (*Sugestão*: $\mathbb{R} - X$ é uma reunião de intervalos abertos disjuntos em cada uma de cujas extremidades f está definida. Estenda-se linearmente ao interior do intervalo.)

Capítulo 4

Conjuntos Conexos

1 Definição e exemplos

Uma *cisão* de um espaço métrico M é uma decomposição $M = A \cup B$, de M como reunião de dois subconjuntos abertos disjuntos A e B. As condições $M = A \cup B$ e $A \cap B = \varnothing$ equivalem a dizer que $A = M - B$ e $B = M - A$. Por conseguinte, numa cisão $M = A \cup B$, os conjuntos A, B são abertos e fechados em M.

Exemplo 1. $\mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ é uma cisão do espaço métrico $\mathbb{R} - \{0\}$. Se M é discreto, todo subconjunto $A \subset M$ determina uma cisão $M = A \cup (M - A)$. Dado um número irracional α, sejam $A = \{x \in \mathbb{Q}; x < \alpha\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Q}; x > \alpha\}$. Então $\mathbb{Q} = A \cup B$ é uma cisão do conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais.

Exemplo 2. Se escrevermos as linhas de uma matriz real $n \times n$ uma após a outra, cada matriz se tornará uma lista de n^2 números reais. Ao fazermos assim, estaremos identificando o conjunto das matrizes reais $n \times n$ com o espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n^2}$. A função determinante $\det\colon \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ é contínua. (Exemplos 26 e 27 do Capítulo 2.) O conjunto $G_n = Gl(\mathbb{R}^n)$, formado pelas matrizes reais $n \times n$ que possuem determinante $\neq 0$ é, portanto, um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^{n^2}$, chamado o *grupo linear total.* Como se sabe, G_n é o conjunto das matrizes reais invertíveis $n \times n$. O subespaço métrico $G_n \subset \mathbb{R}^{n^2}$ admite a cisão $G_n = G_n^+ \cup G_n^-$, onde G_n^+ (respect. G_n^-) é o conjunto das matrizes reais $n \times n$ com determinante > 0 (respect. < 0).

A cisão $M = A \cup B$ diz-se *trivial* quando um dos abertos, A ou

B, é vazio (e portanto o outro é igual a M). Assim, a cisão trivial é $M = M \cup \varnothing$.

Um espaço métrico M chama-se *conexo* quando a única cisão possível em M é a trivial. Um subconjunto X de um espaço métrico M diz-se um *conjunto conexo* quando o subespaço $X \subset M$ é conexo. Quando X admite uma cisão não-trivial, dizemos que X é *desconexo*.

Note que, ao contrário das noções de aberto, fechado, fecho, etc., a propriedade de um conjunto X ser conexo é *intrínseca*, isto é, se $X \subset M$, $X \subset N$ e M, N induzem a mesma métrica em X, então X é um subconjunto conexo de M se, e somente se, é um subconjunto conexo de N.

Proposição 1. *As seguintes afirmações a respeito de um espaço métrico M são equivalentes:*

1) *M é conexo;*
2) *M e $\varnothing$ são os únicos subconjuntos de M ao mesmo tempo abertos e fechados;*
3) *Se $X \subset M$ tem fronteira vazia, então $X = M$ ou $X = \varnothing$.*

Demonstração. Se $M = A \cup B$ é uma cisão, então A e B são abertos e fechados. Reciprocamente, se $A \subset M$ é aberto e fechado, então $M = A \cup (M - A)$ é uma cisão de M. Logo 1) $\Leftrightarrow$ 2). Dado $X \subset M$, sabemos que a condição $X \cap \partial X = \varnothing$ significa que X é aberto, enquanto $X \supset \partial X$ quer dizer que X é fechado. Logo X aberto e fechado $\Leftrightarrow \partial X = X \cap \partial X = \varnothing$. Isto mostra que 2) $\Leftrightarrow$ 3).

Exemplo 3. $\mathbb{R} - \{0\}$, $\mathbb{Q}$ e todo espaço discreto com mais de um ponto são desconexos. Também é desconexo o conjunto $G_n \subset \mathbb{R}^{n^2}$, das matrizes reais $n \times n$ invertíveis. (Note que $G_1 = \mathbb{R} - \{0\}$.) Um espaço métrico com apenas um ponto é conexo. Se $X \subset \mathbb{Q}$ é conexo então X não contém mais de um ponto. De fato, se $a, b \in X$ com $a < b$, tomamos um número irracional α tal que $a < \alpha < b$, pomos $A = \{x \in X; x < \alpha\}$, $B = \{x \in X; x > \alpha\}$ e obtemos uma cisão não-trivial $X = A \cup B$. (Note que A e B são abertos em X porque $A = X \cap (-\infty, \alpha)$ e $B = X \cap (\alpha, +\infty)$.)

Exemplo 4. *A reta $\mathbb{R}$ é um espaço conexo.* Suponhamos, por absurdo, que exista uma cisão não-trivial $\mathbb{R} = A \cup B$. Tomemos

$a \in A$ e $b \in B$; digamos que $a < b$. Seja $X = \{x \in A; x < b\}$. Como $a \in X$, vemos que X não é vazio. Além disso, b é uma cota superior de X. Logo existe $c = \sup X$. É claro que $c \leq b$. Pela definição de sup, para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in X$ (e portanto $x \in A$) tal que $c - \varepsilon < x \leq c$. Logo $c \in \overline{A}$. Sendo A fechado, concluímos que $c \in A$. Como $b \in B$, concluímos que $c \neq b$, donde $c < b$. Sendo A aberto existe $\varepsilon > 0$ tal que $c + \varepsilon < b$ e $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subset A$. Então todos os pontos do intervalo $(c, c+\varepsilon)$ pertencem a X, contradizendo que c seja o sup de X.

2 Propriedades gerais dos conjuntos conexos

Proposição 2. *A imagem de um conjunto conexo por uma aplicação contínua é um conjunto conexo.*

Demonstração. Consideremos primeiro o caso particular em que $f\colon M \to N$ é contínua, sobrejetiva e M é conexo. Queremos provar que $N = f(M)$ é conexo. Com efeito, seja $N = A \cup B$ uma cisão. Então, da Proposição 3, Capítulo 3, segue-se que $M = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ é uma cisão. Como M é conexo, concluímos que um dos conjuntos $f^{-1}(A)$ ou $f^{-1}(B)$ é vazio. Sendo f sobrejetiva, isto implica que A ou B é vazio. O caso geral é conseqüência: dada $f\colon M \to N$ contínua e dado $X \subset M$ conexo, então $f\colon X \to f(X)$ é uma sobrejeção contínua, logo $f(X)$ é conexo, pelo que acabamos de provar.

Corolário. *Se M é conexo e N é homeomorfo a M, então N também é conexo.*

Exemplo 5. Todo intervalo aberto da reta é conexo, por ser homeomorfo a $\mathbb{R}$. (Vide Exemplo 15a, Capítulo 2.) O círculo unitário, $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$, é conexo pois é a imagem da reta pela aplicação contínua sobrejetiva $f\colon \mathbb{R} \to S^1$, $f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$.

Proposição 3. *O fecho de um conjunto conexo é conexo.*

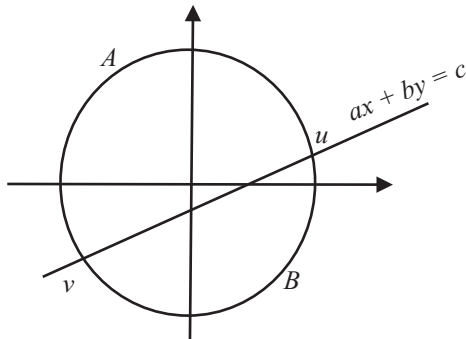
Demonstração. Abordaremos, em primeiro lugar, o caso particular em que $X \subset M$ é um conjunto conexo tal que $\overline{X} = M$, isto é,

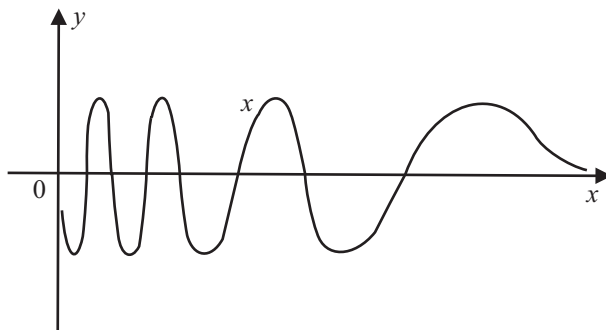
X é denso em M. Provaremos então que M é conexo. De fato, se $M = A \cup B$ for uma cisão, teremos a cisão $X = (A \cap X) \cup (B \cap X)$. (Vide Exemplo 9, Capítulo 3.) Como X é conexo, segue-se que $A \cap X = \varnothing$ ou $B \cap X = \varnothing$. Sendo X denso em M, isto implica $A = \varnothing$ ou $B = \varnothing$. Logo a única cisão de M é a trivial, ou seja, M é conexo. No caso geral, temos X conexo e queremos provar que seu fecho $\overline{X}$ é conexo. Como X é denso em $\overline{X}$ (vide Proposição 10, Capítulo 3), o resultado reduz-se ao que já foi mostrado.

Corolário. *Se $X \subset Y \subset \overline{X}$ e X é conexo, então Y é conexo.*

Com efeito, o fecho de X no subespaço Y é $\widetilde{X} = \overline{X} \cap Y = Y$, logo X é denso em Y e portanto Y é conexo.

Exemplo 6. A proposição acima nos dá outro modo de provar que S^1 é conexo. Tomando $p = (0,1)$ e $X = S^1 - \{p\}$, sabemos que X é homeomorfo à reta R pela projeção estereográfica. (Exemplo 16, Capítulo 2.) Logo X é conexo. Concluímos que S^1 é conexo, observando que $\overline{X} = S^1$. Isto é intuitivamente plausível e equivale a afirmar que p não é um ponto isolado de S^1. Uma demonstração rigorosa deste fato se faz considerando que a projeção $p_1 \colon (x, y) \mapsto x$ é um homeomorfismo do "semicírculo norte" $\{(x, y) \in S^1; y > 0\}$ sobre o intervalo $(-1, +1)$, transformando o pólo norte p no ponto 0. Como 0 não é isolado em $(-1, +1)$, p não é isolado no semicírculo norte e, com maior razão, não é isolado em S^1.

Exemplo 7. Não há a menor dificuldade em definir uma "projeção estereográficca" $\pi_u \colon S^1 - \{u\} \to \mathbb{R}$, a partir de qualquer ponto $u \in S^1$, usado como pólo em vez de $p = (0, 1)$. Daí resulta que, para cada $u \in S^1$, o complemento $S^1 - \{u\}$ é conexo. Entretanto, se omitirmos dois pontos distintos $u, v \in S^1$, obtemos o conjunto desconexo $S^1 - \{u, v\}$. Com efeito, seja $ax + by = c$ a equação da reta que passa pelos pontos u e v. Sejam $A = \{(x, y) \in S^1; ax + by > c\}$ e $B = \{(x, y) \in S^1; ax + by < c\}$.

Como a função $(x, y) \mapsto ax + by$ é contínua (um funcional linear), vemos que A e B são abertos e que $S^1 - \{u, v\} = A \cup B$ é uma cisão não-trivial.

Exemplo 8. Seja $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y = \cos 1/z\}$ o gráfico da função $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \cos 1/x$. Como sabemos, pelo Exemplo 17 do Capítulo 2, X é homeomorfo ao domínio $(0, +\infty)$ de f. Logo X é conexo. Seja $J = \{(0, y); -1 \leq y \leq 1\}$. Todo ponto $z \in J$ é aderente a X. (Na realidade, $\overline{X} = X \cup J$, mas este fato não é relevante aqui.) Logo, para todo subconjunto $T \subset J$, vemos que $X \subset X \cup T \subset \overline{X}$. O Corolário da Proposição 3 nos assegura então que, para todo $T \subset J$, $X \cup T$ é conexo. Devemos admitir que este resultado se choca com nossa intuição inicial sobre conjunto conexo, como aquele que é formado por um só pedaço. Convém manter ainda esta idéia intuitiva, agora porém com a cautela sugerida por este exemplo.

Proposição 4. *Seja $(X_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma família arbitrária de conjuntos conexos num espaço métrico M. Se todos os X_λ contêm o mesmo ponto $a \in M$, então a reunião $X = \bigcup_{\lambda \in L} X_\lambda$ é conexa.*

Demonstração. Seja $X = A \cup B$ uma cisão. O ponto a pertence a um dos conjuntos A ou B. Digamos que seja $a \in A$. Para todo λ, $A \cap X_\lambda$ e $B \cap X_\lambda$ são abertos em X_λ. Logo $X_\lambda = (X_\lambda \cap A) \cup (X_\lambda \cap B)$ é uma cisão de X_λ. Como X_λ é conexo e $a \in X_\lambda \cap A$, concluímos que $X_\lambda \cap B = \varnothing$ para todo $\lambda \in L$. Segue-se que $B = \cup(X_\lambda \cap B) = \varnothing$ e portanto X é conexo.

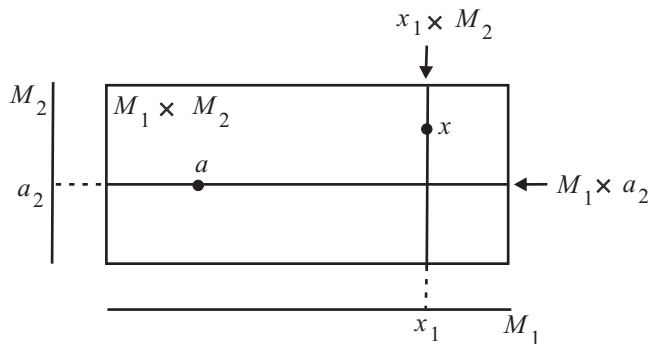
Corolário. *A fim de que o espaço métrico M seja conexo, é necessário e suficiente que dois pontos quaisquer $a, b \in M$ estejam contidos em algum conexo $X_{ab} \subset M$.*

Se M é conexo, basta tomar $X_{ab} = M$ sempre. Reciprocamente, cumprida a condição, fixamos $a \in M$ e obtemos $M = \bigcup_{b \in M} X_{ab}$. Como $a \in X_{ab}$ para todo $b \in M$, a Proposição 4 assegura M conexo.

Exemplo 9. Todo espaço vetorial normado E é conexo pois, dados $a \neq b$ em E, a reta $X_{ab} = \{a + t \cdot (b - a); t \in \mathbb{R}\}$ que os contém é homeomorfa a $\mathbb{R}$ e portanto conexa. Segue-se que toda bola aberta em E é conexa, por ser homeomorfa a E. Toda bola fechada em E também é um conjunto conexo, por ser o fecho da bola aberta de mesmo raio. Em particular, a bola fechada unitária $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n; \langle x, x \rangle \leq 1\}$ é conexa. Daí resulta que a esfera unitária $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \langle x, x \rangle = 1\}$ é conexa quado $n > 0$. Com efeito, quando $n > 0$, temos $S^n = S^n_+ \cup S^n_-$, onde $S^n_+ = \{x \in S^n; x_{n+1} \geq 0\}$ e $S^n_- = \{x \in S^n; x_{n+1} \leq 0\}$ são o hemisfério norte e o hemisfério sul de S^n. Sabemos que a projeção $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \ldots, x_n)$, restrita a S^n_+ (e também a S^n_-) dá um homeomorfismo desse hemisfério sobre B^n. Os homeomorfismos inversos $B^n \to S^n_\pm$, são dados por $x \mapsto \left(x, \pm\sqrt{1 - |x|^2}\right)$. (Vide Exemplo 17, Capítulo 2.) Logo os hemisférios S^n_+ e S^n_- são conexos. Como $e_1 = (1, 0, \ldots, 0) \in S^n_+ \cap S^n_-$, a Proposição 4 nos assegura que S^n é conexa.

Proposição 5. *O produto cartesiano $M = M_1 \times \cdots \times M_n$ é conexo se, e somente se, cada fator M_i é conexo.*

Demonstração. Como cada projeção $p_i \colon M \to M_i$ é contínua e sobrejetiva, M conexo $\Rightarrow$ cada M_i conexo. Quanto à recíproca, basta provar que se M_1 e M_2 são conexos, seu produto cartesiano $M_1 \times M_2$ é conexo. O caso geral resulta da aplicação deste resultado $n-1$ vezes. Fixemos então um ponto $a = (a_1, a_2) \in M_1 \times M_2$. Para cada $x = (x_1, x_2) \in M_1 \times M_2$, o conjunto $C_x = (M_1 \times a_2) \cup (x_1 \times$

M_2) é conexo pois é reunião de dois conexos (homeomorfos a M_1 e M_2 respectivamente) com o ponto (x_1, a_2) em comum. Além disso temos $a \in C_x$ para todo $x \in M = M_1 \times M_2$ e $M = \bigcup_{x \in M} C_x$. Segue-se da Proposição 4 que $M = M_1 \times M_2$ é conexo.

Corolário. *O espaço* $\mathbb{R}^n$ *é conexo.*

Com efeito, $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$. (Este corolário está contido no Exemplo 9.)

Exemplo 10. O cilindro $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2 = 1\}$ é conexo. Com efeito, C é homeomorfo ao produto cartesiano $S^1 \times \mathbb{R}$. $\big[$O homeomorfismo $h\colon C \to S^1 \times \mathbb{R}$ é dada por $h(x, y, z) = ((x, y), z)$.$\big]$

Exemplo 11. Quando $n > 1$, omitindo-se a origem de $\mathbb{R}^n$ tem-se ainda um espaço conexo $\mathbb{R}^n - \{0\}$. Com efeito, a aplicação $h\colon S^n \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}^n - \{0\}$, dada por $h(x, t) = t \cdot x$ é um homeomorfismo, cujo inverso é $k\colon \mathbb{R}^n - \{0\} \to S^n \times (0, +\infty)$, definido por $k(z) = \big(z/|z|, |z|\big)$.

Proposição 6. *Um subconjunto da reta é conexo se, e somente se, é um intervalo.*

Demonstração. Todo intervalo aberto é conexo porque é homeomorfo a $\mathbb{R}$. (Exemplo 15a, Capítulo 2.) Todo intervalo fechado ou semifechado é conexo, por causa da Proposição 3 ou do seu Corolário. Reciprocamente, seja $X \subset \mathbb{R}$ conexo. Suponha que $a, b \in X$ e que $a < c < b$. Provaremos que, neste caso, $c \in X$. Com efeito, se fosse $c \notin X$ então teríamos a cisão $X = [X \cap (-\infty, c)] \cup [X \cap (c, +\infty)]$, a qual é não-trivial porque $a \in X \cap (-\infty, c)$ e

$b \in X \cap (c, +\infty)$. Assim, $a < c < b$ com $a, b \in X \Rightarrow c \in X$. Esta propriedade garante que X seja um intervalo.

Corolário 1. *Se M é um espaço métrico conexo e $f\colon M \to \mathbb{R}$ é uma função real contínua, então $f(M)$ é um intervalo.*

Com efeito, pela Proposição 2, $f(M)$ é um subconjunto conexo da reta. (Note que estamos admitindo intervalos degenerados, do tipo $[a, a]$, que ocorrem quando f é constante.)

Corolário 2. (*Teorema do Valor Intermediário*). *Seja $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se $f(a) < d < f(b)$ então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.*

De fato, a imagem $f([a, b])$ é um intervalo que contém os pontos $f(a)$ e $f(b)$, logo contém o ponto intermediário d. Logo existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = d$. Mas $f(a) < f(c) < f(b)$ exclui a possibilidade de $c = a$ ou $c = b$. Portanto $c \in (a, b)$.

O Teorema do Valor Intermediário é um "teorema de existência". Ele assegura que, mediante as hipóteses feitas, a equação $f(x) = d$ admite pelo menos uma solução c no intervalo (a, b).

Exemplo 12. *Um polinômio real de grau ímpar possui ao menos uma raiz real.* Seja $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$, com $a_n \neq 0$ e n ímpar. Sem perda de generalidade, podemos supor $a_n = 1$. Como $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, basta mostrar que existem $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tais que $p(x_1) < 0 < p(x_2)$. Ora, podemos escrever, para todo $x \neq 0$:

$$(*) \qquad p(x) = x^n \cdot \left[\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{x} + 1\right].$$

Seja $r = |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}| + 1$. Se tomarmos $|x| > r$ teremos:

$$\left|\frac{a_0}{x^n} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{x}\right| \leq \frac{|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|}{|x|} < 1.$$

Logo, quando $|x| > r$, o fator dentro do colchete em (*) é positivo. Isto implica que, para valores de x tais que $|x| > r$, o sinal de $p(x)$ é o mesmo sinal de x^n. Como n é ímpar, vemos que o polinômio $p(x)$ assume valores positivos e negativos, logo se anula em algum ponto. Evidentemente, um polinômio de grau par, como $x^2 + 1$, pode não admitir raízes reais.

Usaremos agora o Teorema do Valor Intermediário a fim de caracterizar homeomorfismos entre intervalos da reta. Começaremos com alguns fatos básicos a respeito de funções monótonas contínuas.

Dado $X \subset \mathbb{R}$, uma função $f\colon X \to \mathbb{R}$ chama-se *crescente* quando, para $x, y \in X$, $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$. Se $x < y$ implica apenas $f(x) \leq f(y)$, f chama-se *não-decrescente.* De modo análogo se define função *decrescente* e função *não-crescente.* Uma função de qualquer desses tipos chama-se *monótona.*

Sejam J um intervalo da reta e Y um subconjunto de J. Lembremos que "Y é denso em J" significa que o fecho de Y no subespaço J é todo o intervalo J. Isto equivale a dizer que todo intervalo não-degenerado $I \subset J$ contém algum ponto de Y (e portanto uma infinidade de pontos de Y).

Proposição 7. *Seja $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função monótona. Se sua imagem $f(X)$ é densa num intervalo J então f é contínua.*

Demonstração. Para fixar as idéias, suponhamos f não-decrescente. Seja $a \in X$. A fim de provar que f é contínua no ponto a, tomamos um $\varepsilon > 0$ arbitrário. Suponhamos, em primeiro lugar, que $f(a)$ pertença ao interior do intervalo J. Então existem $y_1, y_2 \in f(X)$ tais que $f(a) - \varepsilon < y_1 < f(a) < y_2 < f(a) + \varepsilon$. Sejam $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$. Como f é não-decrescente, temos $x_1 < a < x_2$. Chamemos de δ o menor dos números $a - x_1$ e $x_2 - a$. Então $x \in X$, $|x - a| < \delta \Rightarrow x_1 < x < x_2 \Rightarrow y_1 \leq f(x) \leq y_2 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Logo f é contínua no ponto a. Suponhamos agora que $f(a)$ seja o extremo superior do intervalo J. Como f é não-decrescente e $f(X) \subset J$, segue-se então que $a < x \Rightarrow f(x) = f(a)$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $y_1 \in f(X)$ tal que $f(a) - \varepsilon < y_1 < f(a)$. Seja $y_1 = f(x_1)$. Temos $x_1 < a$ porque f é não-decrescente. Tomando $\delta = a - x_1$, vemos que $x \in X$, $|x - a| < \delta \Rightarrow x_1 < x \Rightarrow y_1 \leq f(x) \leq f(a) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$. O caso de $f(a)$ ser extremo inferior de J se trata de modo análogo.

Corolário. *Se $f\colon X \to \mathbb{R}$ é monótona e $f(X)$ é um intervalo então f é contínua.*

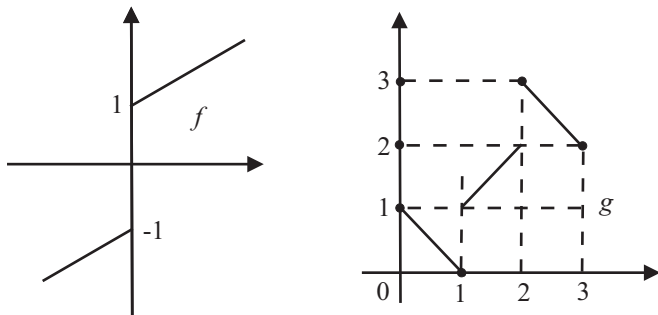
Proposição 8. *Seja $f\colon I \to \mathbb{R}$ contínua, injetiva, definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Então*

1) *f é monótona;*

2) *f é um homeomorfismo de I sobre o intervalo $J = f(I)$.*

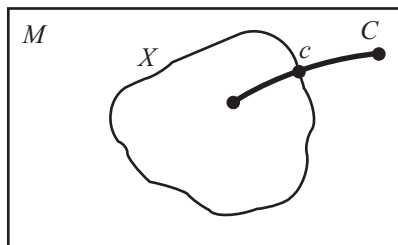
Demonstração. Para demonstrar 1), suporemos inicialmente que $I = [a,b]$ seja um intervalo limitado e fechado. Temos $f(a) \neq f(b)$. Para fixar as idéias, seja $f(a) < f(b)$. Mostraremos então que f é crescente. De fato, se não fosse assim, existiriam $x < y$ em $[a, b]$ com $f(y) < f(x)$. Há duas possibilidades: $f(a) < f(y)$ ou $f(y) < f(a)$. No primeiro caso, temos $f(a) < f(y) < f(x)$. Logo, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $c \in (a, x)$ tal que $f(c) = f(y)$, o que contraria a injetividade de f. No segundo caso, temos $f(y) < f(a) < f(b)$. O mesmo teorema nos dá um ponto $c \in (y, b)$ tal que $f(c) = f(a)$, o que também contradiz a injetividade de f. Quando I é um intervalo arbitrário, o leitor verificará sem dificuldade que $f : I \to R$ é monótona se, e somente se, sua restrição a cada intervalo $[a, b] \subset I$ é monótona. Isto prova 1). Quanto à afirmação 2), sabemos pelo Corolário 1 da Proposição 6 que f é uma bijeção monótona de I sobre o intervalo $J = f(I)$. A inversa de uma bijeção monótona também é monótona. Logo $f^{-1} : J \to I$ é contínua, em virtude do Corolário da Proposição 7.

Corolário. *Seja $f : I \to J$ uma bijeção entre os intervalos I, J. A fim de que f seja um homeomorfismo, é necessário e suficiente que seja uma função monótona.*

Exemplo 13. Existem funções monótonas injetivas descontínuas, como $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x + x/|x|$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. A imagem de f não é um intervalo. Existem também bijeções descontínuas entre intervalos, como $g : [0, 3] \to [0, 3]$, dada por $g(x) = 1 - x$ se $x \in [0, 1]$, $g(x) = x$ se $x \in (1, 2)$ e $g(x) = 5 - x$, se $x \in [2, 3]$. Isto é possível porque g não é monótona.

Exemplo 14. A função $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$, definida por $f(x) = x^n$, ($n > 0$ inteiro) é contínua e crescente. Logo é um homeomorfismo sobre sua imagem, que é um intervalo $J \subset [0,+\infty)$. A desigualdade $(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$ mostra que f não é limitada. Logo $J = [0,+\infty)$, isto é, f é um homeomorfismo de $[0,+\infty)$ sobre si mesmo. O valor $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$ chama-se a *raiz n-ésima* de número $y \geq 0$. Como acabamos de mostrar, não somente existe essa raiz, como também $f^{-1}\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ é contínua, ou seja, $\sqrt[n]{y}$ depende continuamente de y.

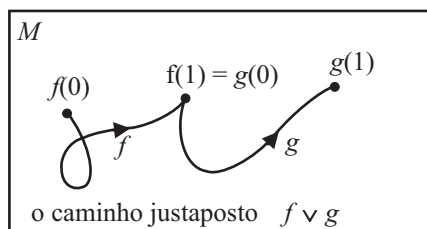
Voltemos à noção geral de conjunto conexo num espaço métrico. O resultado seguinte generaliza o Teorema do Valor Intermediário.

Proposição 9. (*Teorema da Alfândega*). *Sejam C, X subconjuntos de um espaço métrico M. Se C é conexo e tem pontos em comum com X e com $M - X$, então algum ponto de C pertence à fronteira de X.*

Demonstração. As hipóteses $C \cap X \neq \varnothing$ e $C \cap (M - X) \neq \varnothing$ significam que o subconjunto $C \cap X$ do espaço métrico conexo C não é vazio nem é o espaço C inteiro. Logo existe algum ponto c pertencente à fronteira de $C \cap X$ no subespaço C. Mostraremos agora que c também pertence à fronteira de X em M. Com efeito, para todo $\varepsilon > 0$ existem $s \in C \cap X \subset X$ com $d(c,s) < \varepsilon$ e $t \in C - C \cap X = C - X \subset M - X$ com $d(c,t) < \varepsilon$.

Observação. Para obter o Teorema do Valor Intermediário como corolário da Proposição 9, dada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua com $f(a) < d < f(b)$, tomamos $C = [a,b]$ e $X = \{x \in [a,b]; f(x) < d\}$. A Proposição 9 nos dá um ponto $c \in \partial X$. Tem-se necessariamente $f(c) = d$.

3 Conexidade por caminhos

A definição de espaço conexo como aquele que admite apenas a cisão trivial é a expressão matemática da idéia de conjunto formado por um só pedaço. Outra maneira de exprimir a conexidade de um espaço é dizer que se pode passar de um qualquer dos seus pontos para outro por um movimento contínuo, sem sair do espaço. Isto nos leva à noção de espaço conexo por caminhos, conceito mais particular e provido de mais significado intuitivo do que o conceito geral de espaço conexo.

Um *caminho* num espaço métrico M é uma aplicação contínua $f\colon [0,1] \to M$. Os pontos $a = f(0)$ e $b = f(1)$, pertencentes a M, são os *extremos* do caminho f; a é o *ponto inicial* (ou *origem*) e b é o *ponto final* (ou *fim*) de f. Diz-se neste caso que o caminho f *liga* o ponto a ao ponto b em M. Quando $a = b$, diz-se que f é um *caminho fechado* em M. Dados os caminhos $f, g\colon [0,1] \to M$ com $f(1) = g(0)$, podemos definir o *caminho justaposto* $f \vee g\colon [0,1] \to M$, que consiste em seguir primeiro f e depois g. A definição formal é: $(f \vee g)(t) = f(2t)$, se $t \in [0, 1/2]$ e $(f \vee g)(t) = g(2t-1)$, se $t \in [1/2, 1]$. Como $f(1) = g(0)$, estas regras dão o mesmo valor a $f \vee g$ no ponto $1/2$ e portanto $f \vee g$ é contínuo. (Vide Proposição 11 e Corolário, Capítulo 3.) Se $f\colon [0,1] \to M$ é tal que $f(0) = a$ e $f(1) = b$ então $f^*\colon [0,1] \to M$, definido por $f^*(t) = f(1-t)$, é tal

que $f^*(0) = b$ e $f^*(1) = a$. Se escrevermos $a \sim b$ para indicar que existe um caminho em M começando em a e terminando em b, veremos que a relação "$a \sim b$" é reflexiva, simétrica e transitiva.

Um exemplo trivial de caminho é o constante $f\colon [0,1] \to M$, $f(t) = c$ para todo $t \in [0,1]$.

Seja E um espaço vetorial. Dados $a, b \in E$, o *segmento de reta* de extremos a e b é o conjunto $[a,b] = \{(1-t)a + tb; 0 \leq t \leq 1\}$. Quando E é um espaço vetorial normado, a aplicação $f\colon [0,1] \to E$,

definida por $f(t) = (1-t)a + tb$, é contínua e se chama o *caminho retilíneo* de extremos a e b. Às vezes escreveremos $[a, b]$, em vez de f.

Um subconjunto X de um espaço vetorial E chama-se *convexo* quando $a, b \in X \Rightarrow [a, b] \subset X$, isto é, o segmento de reta que liga dois pontos quaisquer de X está contido em X.

Todo subespaço vetorial de E é um conjunto convexo. Se $X \subset E$ e $Y \subset F$ são convexos, então $X \times Y$ é um subconjunto convexo do espaço vetorial $E \times F$. Com efeito, se $z = (x, y)$ e $z' = (x', y')$ pertencem a $X \times Y$ então, para todo $t \in [0, 1]$, o ponto $(1-t)z + tz' = \big((1-t)x + tx', (1-t)y + ty'\big)$ pertence a $X \times Y$. É fácil verificar também que uma interseção arbitrária de conjuntos convexos é um conjunto convexo.

Exemplo 15. *Toda bola num espaço vetorial normado é convexa.* Seja $B = B(a; r)$ a bola aberta de centro a e raio r no espaço vetorial normado E. Dados $x, y \in B$, obtemos $|x-a| < r$ e $|y-a| < r$. Logo, para todo $t \in [0, 1]$, $|(1-t)x + ty - a| = |(1-t)(x-a) + t(y-a)| \leq (1-t)|x-a| + t|y-a| < (1-t)r + tr = r$. Logo $x, y \in B \Rightarrow [x, y] \subset B$ e portanto B é convexa. Da mesma forma se vê que toda bola fechada é convexa.

Um espaço métrico M chama-se *conexo por caminhos* quando dois pontos quaisquer de M podem ser ligados por um caminho contido em M. Um conjunto $X \subset M$ diz-se conexo por caminhos quando o subespaço X tem essa propriedade.

Por exemplo, todo conjunto convexo (em particular, toda bola) num espaço vetorial normado é conexo por caminhos.

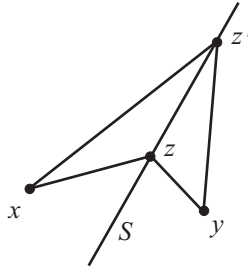
Proposição 10. *Se o espaço métrico M é conexo por caminhos, então M é conexo.*

Demonstração. Se $f\colon [0, 1] \to M$ é um caminho, então a imagem $f([0, 1])$ é um subconjunto conexo de M. (Proposição 2.) Logo dois pontos quaisquer em M estão contidos num subconjunto conexo de M. Pelo Corolário da Proposição 4, M é conexo.

Outra demonstração da Proposição 10, usando apenas a conexidade de $[0, 1]$: Suponhamos que $M = A \cup B$ fosse uma cisão não-trivial de M. Tomemos $a \in A$ e $b \in B$. Por hipótese, existiria um caminho $f\colon [0, 1] \to M$ tal que $f(0) = a$, $f(1) = b$. Então

$[0,1] = f^{-1}(M) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ seria uma cisão de $[0,1]$, com $0 \in f^{-1}(A)$ e $1 \in f^{-1}(B)$. Absurdo.

Exemplo 16. Seja E um espaço vetorial normado, com $\dim E > 1$. Para todo $a \in E$, $E - \{a\}$ é conexo (por caminhos). De fato, sejam $x, y \in E - \{a\}$. Se $[x,y] \subset E - \{a\}$, este segmento de reta nos dará um caminho ligando x a y em $E - \{a\}$. Se, porém, $a \in [x,y]$, como $\dim E > 1$, existe um ponto z não alinhado com $[x,y]$. Então o caminho justaposto $[x,z] \vee [z,y]$ liga x a y em $E - \{a\}$.

Exemplo 17. Generalizando o exemplo anterior, seja $X \subset \mathbb{R}^2$ um subconjunto enumerável do plano. Afirmamos que $\mathbb{R}^2 - X$ é conexo por caminhos. Com efeito, dados $x \neq y$ em $\mathbb{R}^2 - X$, tomamos uma reta S que corte o segmento $[x,y]$ num ponto interior. Para cada $z \in S$, consideremos o caminho justaposto $f_z = [x,z] \vee [z,y]$. Se $z \neq z'$ em S, então os caminhos f_z e $f_{z'}$ têm apenas suas extremidades x, y em comum. Suponhamos, por absurdo, que nenhum dos caminhos f_z estivesse inteiramente contido em $\mathbb{R}^2 - X$. Então, para cada $z \in S$, poderíamos escolher um ponto $\lambda(z)$, pertencente à imagem

de f_z e ao conjunto X. A aplicação $\lambda\colon S \to X$, assim definida, seria injetiva. Como X é enumerável e S não é, esta conclusão é absurda. Logo, existe pelo menos um $z \in S$ tal que f_z é um caminho em $\mathbb{R}^2 - X$, ligando x a y. Segue-se que $\mathbb{R}^2 - X$ é conexo por caminhos. Em particular, o conjunto Z dos pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tais que x ou y é irracional é conexo por caminhos, pois $Z = \mathbb{R}^2 - \mathbb{Q}^2$ e $\mathbb{Q}^2$ é enumerável. Mais geralmente, seja E um espaço vetorial normado qualquer, com $\dim E > 1$. Se $X \subset E$ é enumerável, então $E - X$ é conexo por caminhos. Com efeito, dados $x, y \in E - X$, existe um plano P (subespaço de dimensão 2 em E) que contém x

e y. Pelo resultado anterior, x pode ser ligado a y por um caminho em $P - X$, e portanto em $E - X$.

Valem, para conexão por caminhos, os análogos das Proposições 2, 4, 5 e 6. Mostremos isto:

Proposição 11. a) *A imagem de um conjunto conexo por caminhos através de uma aplicação contínua é conexa por caminhos;*

b) *Uma reunião de conjuntos conexos por caminhos, todos com o mesmo ponto em comum, é conexa por caminhos;*

c) *O produto cartesiano $M = M_1 \times \cdots \times M_n$ é conexo por caminhos se, e somente se, cada fator o é.*

Demonstração. a) Dada $\varphi\colon M \to N$ contínua e tomados $\varphi(a)$, $\varphi(b)$ em $\varphi(M)$, seja $f\colon [0,1] \to M$ um caminho ligando a e b. Então $\varphi \circ f\colon [0,1] \to N$ é um caminho em $\varphi(M)$, ligando $\varphi(a)$ e $\varphi(b)$.

b) Seja $X = \bigcup_{\lambda \in L} X_\lambda$ a reunião. Dados $x, y \in X$, existem $\lambda, \mu \in L$ tais que $x \in X_\lambda$ e $y \in X_\mu$. Sejam $f\colon [0,1] \to X_\lambda$ e $g\colon [0,1] \to X_\mu$ caminhos tais que $f(0) = x$, $f(1) = p$, $g(0) = p$ e $g(1) = y$, onde p é um ponto que pertence a todos os X_λ. Então $f \vee g$ é um caminho em X, ligando x a y.

c) Seja cada M_i conexo por caminhos e tomemos $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ em M. Para cada $i = 1, \ldots, n$, existe um caminho $f_i\colon [0,1] \to M_i$ tal que $f_i(0) = x_i$, $f_i(1) = y_i$. Seja $f = (f_1, \ldots, f_n)\colon [0,1] \to M$ o caminho definido por $f(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t))$. É claro que f liga x a y em M.

Exemplo 18. *Um conjunto conexo, que não é conexo por caminhos.* Seja $X \subset \mathbb{R}^2$ o gráfico da função $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \cos(1/x)$ se $x > 0$ e $f(0) = 0$. Segue-se do Exemplo 8 acima que X é conexo. Mostraremos que X não é conexo por caminhos, provando que se $\lambda\colon [0,1] \to X$ for um caminho com $\lambda(0) = (0,0)$, então λ será constante. Com efeito, dado λ, podemos escrever, para todo $t \in [0,1]$, $\lambda(t) = (\alpha(t), f(\alpha(t)))$, onde $\alpha = p_1\lambda$. Seja $A = \{t \in [0,1]; \alpha(t) = 0\}$. Queremos provar que $A = [0,1]$. Ora, A é fechado e não-vazio, pois $0 \in A$. Resta mostrar que A é aberto em $[0,1]$. Tomemos um ponto $a \in A$. A continuidade de λ nos dá uma bola aberta J de centro a em $[0,1]$ tal que $t \in J \Rightarrow |\lambda(t)| < 1$. J é um intervalo, logo $\alpha(J)$ é um intervalo contendo 0. Se $\alpha(J)$ não fosse

degenerado, existiria $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/2\pi n \in \alpha(J)$, ou seja, existiria $t \in J$ tal que $\alpha(t) = 1/2\pi n$, o que daria $\lambda(t) = (1/2\pi n, \cos(2\pi n)) = (1/2\pi n, 1)$, contradizendo o fato de ser $|\lambda(t)| < 1$ para todo $t \in J$.

O exemplo acima mostra que a Proposição 3 não vale para conexão por caminhos, pois se G é o gráfico de $f|(0, +\infty)$ então $G \subset X \subset \overline{G}$, sendo G conexo por caminhos.

Exemplo 19. Para $n > 0$, a esfera $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \langle x, x\rangle = 1\}$ é conexa por caminhos. Com efeito, a aplicação $f\colon \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \to S^n$, dada por $f(x) = x/|x|$, é contínua. (E sobrejetiva, pois $f(x) = x$ quando $x \in S^n$.) Pelo Exemplo 16, $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ é conexo por caminhos (pois $n > 0$). Logo S^n também o é. O mesmo resultado pode ser obtido de modo direto assim: dados $a, b \in S^n$, se for $b \neq -a$, isto é, se a e b não forem antípodas então $0 \notin [a, b]$. Então $f\colon [0, 1] \to S^n$ definido por

$$f(t) = \frac{(1-t)a + tb}{|(1-t)a + tb|},$$

é um caminho em S^n, ligando a e b. Este caminho é o que se chama um "arco $\overset{\frown}{ab}$ de grande círculo" em S^n. Se, porém, tivermos $b = -a$, existirão infinitos arcos de grande círculo ligando a e b. Escolheremos um deles assim: fixamos um ponto $c \in S^n$, tal que $c \neq a$ e $c \neq b$ e tomamos $f =$ justaposição do arco $\overset{\frown}{ab}$ com o arco $\overset{\frown}{cb}$.

Estabeleceremos a seguir uma condição suficiente para que um espaço métrico conexo seja conexo por caminhos.

Um espaço métrico M chama-se *localmente conexo por caminhos* quando para todo $x \in M$ e toda vizinhança $V \ni x$ existe uma vizinhança conexa por caminhos $U \ni x$ tal que $x \in U \subset V$.

Exemplo 20. O espaço $\mathbb{R}^n$ ou, mais geralmente, todo espaço vetorial normado E, é localmente conexo por caminhos. Com efeito, dados $x \in E$ e uma vizinhança V de x em E, existe, por definição de vizinhança, uma bola B de centro x tal que $x \in B \subset V$. Ora, B é conexa por caminhos, por ser convexa.

Exemplo 21. Se M é localmente conexo por caminhos, todo subconjunto aberto de M tem a mesma propriedade. Logo, todo aberto do $\mathbb{R}^n$ (ou, mais geralmente, de um espaço vetorial normado) é localmente conexo por caminhos.

Exemplo 22. Um espaço métrico M chama-se uma *variedade topológica de dimensão* n quando para todo $x \in M$ existe um aberto $U \ni x$ homeomorfo a um subconjunto aberto do espaço $\mathbb{R}^n$. A esfera S^n é um exemplo de variedade: dado $x \in S^n$, tome $y \neq x$, faça $U = S^n - \{y\}$ e use y como pólo de uma projeção estereográfica $\pi_y \colon U \to \mathbb{R}^n$, a qual é um homeomorfismo entre U e $\mathbb{R}^n$. Outros exemplos (triviais) de variedades são os subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$. Segue-se do exemplo anterior que toda variedade topológica M é um espaço localmente conexo por caminhos. Com efeito, dados $x \in M$ e uma vizinhança $V \ni x$, existe um aberto $U \ni x$ e um homeomorfismo $h \colon U \to U_0$, onde U_0 é um aberto em $\mathbb{R}^n$. Substituindo, se necessário, U por $U \cap \operatorname{int} V$, podemos supor $x \in U \subset V$. Existe um aberto W_0 em $\mathbb{R}^n$ conexo por caminhos, tal que $h(x) \in W_0 \subset U_0$. Portanto $W = h^{-1}(W_0)$ é conexo por caminhos, aberto em M, e tal que $x \in W \subset V$.

Proposição 12. *Seja M um espaço métrico localmente conexo por caminhos. Então M é conexo por caminhos se, e somente se, é conexo.*

Demonstração. Suponhamos que M seja conexo (além de localmente conexo por caminhos). Escrevamos $x \sim y$ para significar que existe um caminho $f \colon [0,1] \to M$ com $f(0) = x$ e $f(1) = y$. Indiquemos com $x \not\sim y$ a negação de $x \sim y$. Sabemos que $x \sim y$, $y \sim z \Rightarrow x \sim z$. Fixemos então $a \in M$ e ponhamos $A = \{x \in M; x \sim a\}$. Afirmamos que A é aberto em M. Com efeito, dado $x \in A$, tomemos uma vizinhança conexa por caminhos $U \ni x$. Temos: $u \in U \Rightarrow u \sim x$, $x \sim a \Rightarrow u \sim a \Rightarrow u \in A$. Logo $x \in U \subset A$ e portanto A é aberto. Também o complementar $M - A$ é aberto. De fato, dado $y \in M - A$, existe uma vizinhança conexa por caminhos $W \ni y$. Temos: $w \in W \Rightarrow w \sim y$, $y \not\sim a \Rightarrow w \not\sim a \Rightarrow w \in M - A$. Logo $y \in W \subset M - A$ e portanto $M - A$ é aberto. Assim, A é aberto, fechado e não-vazio. Como M é conexo, concluímos que $A = M$. Logo, M é conexo por caminhos. A recíproca é evidente.

Corolário. *Um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ é conexo se, e somente se, é conexo por caminhos.*

4 Componentes conexas

Se um espaço métrico M não é conexo, cabe a pergunta: quantos pedaços tem M? Os pedaços de um espaço são suas componentes conexas, que estudaremos agora.

Sejam M um espaço métrico e x um ponto de M. A *componente conexa* de x em M é a reunião C_x de todos os subconjuntos conexos de M que contêm x.

Existe pelo menos um subconjunto conexo de M contendo x, a saber: $\{x\}$. Logo C_x não é vazia. Pela Proposição 4, cada componente conexa C_x, $x \in M$, é um conjunto conexo.

C_x é o maior subconjunto conexo de M que contém x. Ou seja, se $X \subset M$ é conexo e $x \in X$, então $X \subset C_x$. De fato, nessas condições X é um dos conjuntos conexos cuja reunião é C_x. Logo $X \subset C_x$.

A relação "existe um subconjunto conexo de M contendo os pontos x e y", que simbolizaremos com $x \mapsto y$, é uma equivalência em M, isto é, tem-se $x \mapsto x$, $x \mapsto y \Rightarrow y \mapsto x$, e $x \mapsto y$, $y \mapsto z \Rightarrow x \mapsto z$. As classes de equivalência segundo esta relação são as componentes conexas de M. Em outras palavras, $C_x = C_y \Leftrightarrow x \mapsto y$. A implicação $\Rightarrow$ é evidente. Quanto à recíproca, se existe um conexo X contendo x e y, então $y \in X \subset C_x$ e, como C_x é agora um conexo contendo y, segue-se que $C_x \subset C_y$. Do mesmo modo se vê que $C_y \subset C_x$, donde $C_x = C_y$.

A família $(C_x)_{x \in M}$ das componentes conexas de um espaço métrico M fornece, portanto, uma *partição* de M em partes disjuntas. Isto é: $M = \bigcup_{x \in M} C_x$ e $C_x \cap C_y \neq \varnothing \Rightarrow C_x = C_y$.

Cada componente conexa C do espaço métrico M é a componente conexa de cada um dos pontos $x \in C$. C é um subconjunto conexo *máximo* em M, isto é: se $X \subset M$ é conexo e $X \supset C$ então $X = C$. Mais ainda: se $X \subset M$ é conexo e $X \cap C \neq \varnothing$ então $X \subset C$. Todo subconjunto conexo não-vazio de M está contido numa única componente conexa.

Toda componente conexa $C \subset M$ é um subconjunto fechado. Com efeito, seu fecho $\overline{C}$ é conexo. (Proposição 3.) Se C não fosse fechado, a inclusão $C \subset \overline{C}$ seria própria e C não seria um conexo máximo.

Se $h\colon M \to N$ é um homeomorfismo então, $C \subset M$ é uma componente conexa de M se, e somente se, $h(C)$ é uma componente conexa de N.

Exemplo 23. As componentes conexas de $\mathbb{R}-\{0\}$ são as semi-retas $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$. Mais geralmente, se $M = \bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda$ é uma reunião disjunta de conjuntos $A_\lambda \subset M$ que são ao mesmo tempo não-vazios, abertos, fechados e conexos, então cada A_λ é uma componente conexa de M. De fato se C é um subconjunto conexo de M tal que $A_{\lambda_0} \subset C$ para algum $\lambda_0 \in L$, então, pondo $B = C \cap \big[\bigcup_{\lambda\neq\lambda_0} A_\lambda\big]$, obtemos uma cisão $C = A_{\lambda_0} \cup B$. Sendo C conexo e $A_{\lambda_0} \neq \varnothing$, concluímos que $B = \varnothing$, isto é, que $C = A_{\lambda_0}$. Nestas condições, a partição $M = \cup A_\lambda$ é a expressão de M como reunião de suas componentes conexas.

É bom notar porém que nem sempre as componentes conexas de um espaço métrico são subconjuntos abertos. Isto é o que mostraremos agora.

Exemplo 24. No espaço métrico $\mathbb{Q}$, dos números racionais, cada componente conexa reduz-se a um ponto. Isto equivale a dizer que nenhum subconjunto conexo de $\mathbb{Q}$ pode conter dois pontos distintos. (Vide Exemplo 3.)

Exemplo 25. Generalizando o exemplo anterior, mostraremos que se M é um espaço métrico enumerável então toda componente conexa de M se reduz a um único ponto. Isto equivale a mostrar que se M é um espaço conexo com mais de um ponto então M não é enumerável. Para provar isto, fixemos $a \in M$ e consideremos a função $d_a\colon M \to \mathbb{R}$, onde $d_a(x) = d(a, x)$. Sabemos que d_a é contínua. Sendo M conexo, a imagem de d_a é um intervalo J. Como existe em M um ponto $b \neq a$, J contém pelo menos $0 = d(a, a)$ e o número positivo $d(a, b)$. Logo $J = d_a(M)$ não é enumerável. Conseqüentemente, M também não é enumerável.

Exemplo 26. Um problema importante de Topologia é determinar as componentes conexas de um espaço de aplicação contínuas $\mathcal{C}_0(M; N)$. Disto se ocupa a chamada “teoria da homotopia”. Por exemplo para todo $n > 0$, o espaço $C_0(S^n; S^n)$ das aplicações contínuas (limitadas) $f\colon S^n \to S^n$ tem uma infinidade enumerável de componentes conexas. A cada $f\colon S^n \to S^n$ contínua se associa

um inteiro $n = n(f) \in \mathbb{Z}$, chamado o *grau* de f. Duas aplicações contínuas $f, g\colon S^n \to S^n$ pertencem à mesma componente conexa em $\mathcal{C}_0(S^n; S^n)$ se e somente se possuem o mesmo grau. (Teorema de Hopf-Brouwer.) A demonstração deste fato requer técnicas de Topologia Algébrica ou de Topologia Diferencial e não pode ser dada aqui.

5 A conexidade como invariante topológico

Para encerrar estas considerações sobre conjuntos conexos, daremos alguns exemplos de como se pode usar a conexidade como invariante topológico para distinguir espaços que não são homeomorfos.

O problema é o seguinte. Temos dois espaços métricos M e N. Suspeitamos que eles não são homeomorfos e queremos provar este fato. Se M é conexo e N não é, o assunto está encerrado. Não pode haver um homeomorfismo entre um espaço conexo e um não conexo.

A dificuldade realmente começa quando M e N são ambos conexos. Por exemplo, pode um intervalo aberto (a, b) ser homeomorfo a um intervalo semi-aberto $[c, d)$? Ambos são conexos. Mas há uma diferença: se retirarmos o extremo c do intervalo $[c, d)$ ele continua conexo, pois obteremos o intervalo aberto (c, d). Mas *qualquer* ponto que se retire do intervalo (a, b) o deixa desconexo. Logo não pode haver um homeomorfismo $h\colon [c, d) \to (a, b)$. Com mais precisão: h, se existisse, induziria por restrição um homeomorfismo entre $[c, d) = \{c\} = (c, d)$ e o espaço desconexo $(a, b) - \{h(c)\}$.

Outro exemplo: podem os intervalos $[a, b]$ e $[c, d)$ ser homeomorfos? Não, pois um homeomorfismo $h\colon [a, b] \to [c, d)$ induziria, por restrição, outro entre $[a, b] - \{a, b\} = (a, b)$ e $[c, d) - \{h(a), h(b)\}$. Ora, como $h(a) \neq h(b)$, este último espaço é desconexo.

Usando considerações do tipo acima, o leitor pode verificar que os intervalos não-degenerados da reta se classificam em três grupos. Os intervalos de cada grupo são homeomorfos entre si mas nenhum deles é homeomorfo a um intervalo de outro grupo. Os grupos são:

I) (a, b), $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, +\infty)$;

II) $[a,b)$, $(a,b]$, $[a,+\infty)$, $(-\infty,b]$;

III) $[a,b]$.

Ainda usando conexidade, vemos que o círculo $S^1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x^2+y^2=1\}$ não é homeomorfo a nenhum subconjunto da reta. Com efeito, todo subconjunto não-vazio da reta pode tornar-se desconexo pela retirada conveniente de um dos seus pontos. Por outro lado, para todo $p\in S^1$, tem-se $S^1-\{p\}$ conexo.

Para finalizar, mostremos que as letras X e I (pensadas como desprovidas de extremidades) não são homeomorfas. Tanto X como I são subconjuntos conexos do plano. Ambos se tornam desconexos pela retirada de qualquer um dos seus pontos. Mas há uma diferença: o complementar de qualquer ponto de I tem duas componentes conexas, enquanto X possui um ponto (o crucial) cujo complementar tem quatro componentes conexas!

Devemos advertir, entretanto, que este método de mostrar que certos espaços não são homeomorfos funciona apenas em casos simples. Situações mais sutis exigem invariantes mais sofisticados do que o número de componentes conexas. Tais invariantes são estudados na Topologia Algébrica e na Topologia Diferencial.

Com nossos métodos, o leitor pode provar que S^1 não é homeomorfo a S^n $(n>1)$. Mas não dá para provar que S^2 não é homeomorfa a S^3! Ou mesmo que $\mathbb{R}^2$ não é homeomorfo a $\mathbb{R}^2-\{0\}$. É preciso aprender técnicas mais poderosas.

EXERCÍCIOS DO CAPÍTULO 4

§1

1. Sejam $S,Y\subset M$ tais que $M=X\cup Y$ e $X\cap Y=\varnothing$. Então $M=X\cup Y$ é uma cisão se, e somente se, $X\cap\overline{Y}=\overline{X}\cap Y=\varnothing$. (Ou seja: $x\in X\Rightarrow d(x,Y)>0$ e $y\in Y\Rightarrow d(y,X)>0$.)

2. Seja $\varphi\colon M\to N$ um homeomorfismo local. Dado o espaço métrico X, sejam $f,g\colon X\to M$ contínuas tais que $\varphi\circ f=\varphi\circ g$. Mostre que se X for conexo então tem-se $f=g$ ou então $f(x)\neq g(x)$ para todo $x\in X$.

3. Seja $f\colon M\to N$ contínua e localmente injetiva. Se M é conexo e existe uma aplicação contínua $g\colon N\to M$ tal que $f\circ g=\mathrm{id}_N$ então f é um homeomorfismo de M sobre N.

4. Seja G um grupo metrizável conexo. Prove que G é gerado por qualquer vizinhança V do elemento neutro $e \in G$. Mais precisamente, dado qualquer $x \in G$, existem $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ tais que $x = v_1 \cdot v_2 \ldots v_n$.

5. Sejam X, Y e M conexos. Se $\partial X \subset Y$ então $X \cup Y$ é conexo.

6. Seja M um espaço métrico com a "propriedade do valor intermediário", isto é, toda função contínua $f\colon M \to \mathbb{R}$ que assume um valor positivo e outro negativo se anula em algum ponto de M. Prove que M é conexo.

7. Sejam cis(M) o conjunto das cisões $M = A \cup B$ do espaço métrico M e $\mathcal{C}(M; \{0,1\})$ o conjunto das funções contínuas $f\colon M \to \{0,1\}$ tomando valores no espaço discreto com dois pontos: 0 e 1. Defina uma sobrejeção $\varphi\colon \mathcal{C}(M; \{0,1\}) \to \text{cis}(M)$ tal que a imagem inversa de cada elemento tenha exatamente dois pontos.

8. Seja $\varepsilon > 0$. Uma *ε-cadeia* num espaço métrico M é uma lista finita $a_1, \ldots, a_n$ de pontos de M tais que $d(a_i, a_{i+1}) < \varepsilon$, $i = 1, \ldots, n-1$. Os pontos a_1 e a_n dizem-se então *ε-encadeados* em M. Dados $a \in M$ e $\varepsilon > 0$, o conjunto dos pontos de M que são ε-encadeados com a é aberto e fechado em M. Se M é conexo, dois pontos quaisquer de M são ε-encadeados para todo $\varepsilon > 0$. Dê exemplo de espaço desconexo no qual dois pontos quaisquer são ε-encadeados para todo $\varepsilon > 0$.

9. Sejam $X \subset M$ conexos. Prove que se $A \subset M - X$ é aberto e fechado em $M - X$ então $A \cup X$ é conexo.

10. Dados $a, b \in M$, suponha que exista um subconjunto $X \subset M$, aberto e fechado, tal que $a \in X$ e $b \notin X$. Então nenhum subconjunto conexo de M pode conter a e b simultaneamente.

§2

11. Um espaço métrico M é conexo se, e somente se, toda função contínua $f\colon M \to \{0,1\}$ é constante. Use este fato para dar novas demonstrações das Proposições 3 e 4 do Capítulo 4.

12. Seja $f\colon M \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $c \in \mathbb{R}$ é um número estritamente compreendido entre o máximo e o mínimo de f em M, então $M - f^{-1}(c)$ é desconexo.

13. Seja $n > 1$. Dados $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $a \in \mathbb{R}^n$, tem-se $U \cup \{a\}$ aberto se, e somente se, a é um ponto isolado da fronteira de U.

14. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, com $n > 1$ e $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ contínua com a seguinte propriedade: existe um subconjunto fechado discreto $X \subset U$ tal que $f|(U - X)$ é um homeomorfismo local. Prove que f é aberta.

15. Para toda função contínua $f\colon S^1 \to \mathbb{R}$, prove que existe um ponto $x \in S^1$ tal que $f(x) = f(-x)$.

16. Admitamos que exista uma classe de subconjuntos do plano $\mathbb{R}^2$, chamados as *figuras geométricas* ou, simplesmente, as figuras, com a seguinte propriedade: dada uma figura F, cada reta $ax + by + c = 0$ reparte F em duas regiões F_1 e F_2, tais que a diferença área(F_1) − área(F_2) depende continuamente dos parâmetros a, b, c da reta. Prove, a partir daí, que, dadas duas figuras quaisquer $F, G \subset \mathbb{R}^2$, existe uma reta do plano que determina decomposições $F = F_1 \cup F_2$ e $G = G_1 \cup G_2$ com área(F_1) = área(F_2) e área(G_1) = área(G_2).

17. Prove que, no círculo S^1, o complementar de um conjunto conexo ainda é conexo.

18. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real contínua com a seguinte peculiaridade: para cada $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ é um número transcendente. Sabe-se ainda que $f(\pi) = \pi$. Pede-se determinar $f(\sqrt{2})$ e $f(e)$.

19. Seja $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ contínua, tal que $f(0) = f(1)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, prove que existe $x \in [0,1]$ tal que $x + 1/n \in [0,1]$ e $f(x + 1/n) = f(x)$.

20. Seja $(X_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma família de conjuntos conexos num espaço métrico M, tais que $X_\lambda \cap X_\mu \neq \varnothing$ para quaisquer $\lambda, \mu \in L$. Prove que $\bigcup_{\lambda \in L} X_\lambda$ é conexo.

21. Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ subconjuntos conexos de um espaço métrico M, tais que $X_n \cap X_{n+1} \neq \varnothing$ para todo n. Mostre que $X = \cup X_n$ é conexo.

22. Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $Y \subset \mathbb{R}^2$. Se X e Y são homeomorfos, então $\operatorname{int} Y = \varnothing$.

§3

23. Seja $f\colon E \to \mathbb{R}$ um funcional linear definido no espaço vetorial normado E. Prove que f é contínuo se, e somente se, seu núcleo $F = f^{-1}(0)$ é um subconjunto fechado de E. (*Sugestão*: supondo F fechado, mostre que, para todo $a \in \mathbb{R}$, o conjunto $X_a = \{x \in E; f(x) > a\}$ é aberto. Para isso, use o fato de que toda bola é conexa.)

24. Prove que não existe uma norma em $\mathbb{R}^2$ relativamente à qual as bolas tenham a forma de uma estrela de 6 pontas.

25. Se um aberto $A \subset \mathbb{R}^m$ é conexo então dois pontos quaisquer de A podem ser ligados por uma poligonal contida em A, cujos lados são paralelos aos eixos.

26. Prove que o produto de duas variedades topológicas, um subconjunto aberto de uma variedade topológica e o gráfico de uma aplicação contínua $f\colon M \to N$ entre variedades topológicas são ainda variedades topológicas.

27. Seja M uma variedade topológica conexa. Prove que, dados $a, b \in M$ quaisquer, existe um homeomorfismo $h\colon M \to M$ tal que $h(a) = b$. Conclua que um intervalo fechado, diferente de $\mathbb{R}$, não é uma variedade topológica.

28. O conjunto das matrizes diagonais complexas $n \times n$ invertíveis é um subconjunto conexo por caminhos de $\mathbb{C}^{n^2}$. Idem para as matrizes do tipo diag$[u_1, \ldots, u_n]$, onde cada u_i é um número complexo de módulo 1.

29. O conjunto das matrizes complexas hermitianas $n \times n$ é conexo por caminhos. Idem para as hermitianas definidas positivas. Resultados análogos valem para matrizes reais simétricas e simétricas definidas positivas. (*Sugestão*: tente convexidade.)

30. Seja $U(n) \subset \mathbb{C}^{n^2}$ o grupo unitário (formado pelas matrizes complexas $n \times n$ unitárias). Prove que $U(n)$ é conexo por caminhos. (*Sugestão*: todo elemento de $U(n)$ é conjugado a uma matriz diagonal.)

31. Use o fato de que toda matriz complexa $n \times n$ é o produto de uma matriz hermitiana definida positiva por uma matriz unitária para provar que o grupo $Gl(\mathbb{C}^n)$, das matrizes invertíveis complexas $n \times n$ é um subconjunto (aberto) conexo por caminhos de $\mathbb{C}^{n^2}$.

§4

32. Seja G_n o grupo das matrizes reais invertíveis $n \times n$. Mostre que, dada qualquer $A \in G_n$, existe um caminho em G_n que começa em A e termina numa matriz ortogonal. (*Sugestão*: tomando $P = AA^*$ e $O = AP^{-1}$, escreva $A = OP$, como produto de uma matriz simétrica positiva definida por uma matriz ortogonal.)

33. Use a forma canônica das matrizes ortogonais (vide [Gelfand], pág. 124) para concluir que o grupo $SO(n)$, das matrizes $n \times n$ ortogonais de determinante > 0 é conexo por caminhos. Conclua que o grupo $O(n)$, de todas as matrizes ortogonais $n \times n$, tem 2 componentes conexas. Use o exercício anterior para concluir o mesmo sobre G_n .

34. Seja $E \subset \mathbb{R}^m$ um subespaço vetorial. Se $\dim E = m - 1$, então $\mathbb{R}^m - E$ tem duas componentes conexas, cada uma das quais tem E como fronteira. Para qualquer subconjunto próprio $X \subset E$, tem-se porém $\mathbb{R}^m - X$ conexo. Prove que se $\dim E \leq m - 2$ então $\mathbb{R}^m - E$ é conexo.

35. Sejam M uma variedade topológica conexa de dimensão m e $S \subset M$ uma subvariedade "mansa" de codimensão 1. Isto significa que, para todo $x \in S$, existem um aberto $U \subset M$, com $x \in U$, e um homeomorfismo $h\colon U \to \mathbb{R}^m$ tal que $h(U \cap S) = \mathbb{R}^{m-1}$. Prove que se S é fechada em M então $M - S$ tem no máximo duas componentes conexas.

36. Quantas componentes conexas tem o conjunto $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ (x \cdot y)^2 = xy\}$?

37. Uma aplicação contínua tomando valores num espaço discreto é constante em cada componente conexa do seu domínio. A recíproca é falsa.

38. Se $X \subset M$ são conexos então, para cada componente conexa C de $M - X$, tem-se $M - C$ conexo.

39. Um espaço métrico M diz-se *localmente conexo* quando, para todo $x \in M$ e todo aberto $U \ni x$, existe um aberto conexo V, tal que $x \in V \subset U$. Prove que M é localmente conexo (por caminhos) se, e somente se, para todo aberto $A \subset M$ as componentes conexas (por caminhos) de A são subconjuntos abertos.

40. Seja $X \subset \mathbb{R}^2$ formado pela reunião das retas $y = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$, com os eixos coordenados $x = 0$ e $y = 0$. Mostre que X é conexo porém não é localmente conexo.

41. Todo espaço discreto é localmente conexo. $\mathbb{Q}$ não é localmente conexo. Se $f\colon M \to N$ é contínua e aberta, e M é localmente conexo, então $f(M)$ também o é. Se supusermos apenas f contínua, o resultado não vale.

42. Seja X o gráfico da função $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \cos 1/x$ se $x > 0$, e $f(0) = 0$. Prove que X é conexo porém não é localmente conexo.

43. Seja M desconexo e localmente conexo. Se $A, B \subset M$ são conexos, disjuntos, não-vazios, tais que $M = A \cup B$ então A e B são abertos em M.

44. Todo subconjunto aberto da reta se exprime, de modo único, como reunião enumerável de intervalos abertos, dois a dois disjuntos, cujas extremidades pertencem à fronteira do conjunto dado.

45. Num grupo metrizável G, a componente conexa do elemento neutro é um subgrupo normal. As demais componentes conexas de G são as classes laterais desse subgrupo.

46. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto limitado. Prove que $\mathbb{R}^n - X$ possui exatamente uma componente conexa ilimitada, se $n > 1$.

47. Seja M um espaço métrico. A relação "existe um caminho em M ligando x a y" é uma equivalência em M, cujas classes chamam-se as *componentes conexas por caminhos* do espaço M. Mostre que tais componentes podem não ser subconjuntos fechados de M. Mostre que se M for localmente conexo por caminhos estas componentes coincidem com as componentes conexas usuais de M e portanto são subconjuntos abertos e fechados de M.

48. Certo ou Errado?

    (a) O interior de um conjunto conexo é ainda conexo.
    (b) Idem para a fronteira.
    (c) Seja $f\colon M \to N$ contínua sobrejetiva. Se M tem m componentes conexas e N tem n então $m \geq n$.

(d) Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto então cada componente conexa de A é aberta.
(e) Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que f(conexo) = conexo, então f é contínua.
(f) Se $a, b \in M$ pertencem a componentes conexas distintas, então existe uma cisão $M = A \cup B$ com $a \in A$ e $b \in B$. (*Sugestão*: considere $a = (0,0)$, $b = (0,1)$, $X = \{(1/n, y) \in \mathbb{R}^2; n \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{R}\}$ e $M = X \cup \{a, b\}$.)

49. Prove que o cone $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; z^2 = x^2 + y^2\}$ não é uma variedade topológica.

50. Considere as letras maiúsculas A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, X, Z desprovidas de extremidades. Agrupe-as em classes de figuras homeomorfas. Quais dessas letras são topologicamente homogêneas?

Capítulo 5

Limites

1 Limites de seqüências

Uma *seqüência* num conjunto M é uma aplicação $x\colon \mathbb{N} \to M$, definida no conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$. O valor que a seqüência x assume no número $n \in \mathbb{N}$ será indicado por x_n, em vez de $x(n)$, e chamar-se-á o *n-ésimo termo* da seqüência.

Usaremos as notações $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou (x_n) para representar uma seqüência. Por outro lado, escreveremos $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, $\{x_n\,; n \in \mathbb{N}\}$ ou $x(\mathbb{N})$ para indicar o conjunto dos valores, ou conjunto dos termos da seqüência. Este conjunto não deve ser confundido com a seqüência.

Por exemplo, se definirmos $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ pondo $x_n = (-1)^n$, então obteremos a seqüência $(-1, 1, -1, 1, \dots)$, cujo conjunto de valores é $\{-1, 1\}$. Vemos assim que entre os termos x_n da seqüência podem ocorrer repetições, isto é, pode-se ter $x_m = x_n$ com $m \neq n$. Quando a aplicação $x\colon \mathbb{N} \to M$ for injetiva, ou seja, quando $m \neq n \Rightarrow x_m \neq x_n$, diremos que (x_n) é uma *seqüência de termos distintos*, ou sem repetições.

Exemplo 1. Fixemos $a \in \mathbb{R}$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, ponhamos $x_n = e^{ina} = (\cos(na), \operatorname{sen}(na))$. Obtemos assim uma seqüência (x_n) no plano $\mathbb{R}^2$ ou, mais precisamente, no círculo S^1. Esta seqüência tem repetições se, e somente se, a é um múltiplo racional de 2π, isto é, $a = 2np/q$, com $p, q \in \mathbb{Z}$. De fato, $e^{ima} = e^{ina}$ com $m \neq n \Leftrightarrow e^{i(m-n)a} = 1 \Leftrightarrow (m-n)a = 2k\cdot\pi \Leftrightarrow a = 2\pi\cdot k/(m-n)$.

Uma *subseqüência* de (x_n) é uma restrição da aplicação $n \mapsto x_n$

a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \dots\}$ de $\mathbb{N}$. A subseqüência é indicada pelas notações $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots)$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}'}$, $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ou, simplesmente, (x_{n_k}).

Estritamente falando, a subseqüência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ não é uma seqüência porque está definida apenas num subconjunto dos números naturais. Mas, escrevento $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \dots\}$, a subseqüência $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots)$ pode ser considerada, de modo natural, como a aplicação $1 \mapsto x_{n_1}, 2 \mapsto x_{n_2}, \dots, k \mapsto x_{n_k}, \dots$ e portanto como uma seqüência. A própria notação $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ já a exibe como seqüência.

Por exemplo, a seqüência $(4, 16, 64, \dots, 4^k, \dots)$ é uma subseqüência de $(2, 4, 8, 16, \dots, 2^n, \dots)$, na qual $\mathbb{N}'$ é o conjunto dos números pares.

Uma seqüência (x_n) no espaço métrico M chama-se *limitada* quando o conjunto dos seus termos é limitado, isto é, quando existe $c > 0$ tal que $d(x_m, x_n) \le c$ para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2. Uma seqüência constante ($x_n = a$ para todo n) ou, mais geralmente, uma seqüência que assume apenas um número finito de valores, é evidentemente limitada. Se a é um número real, com $|a| > 1$, a seqüência de números reais $x_n = a^n$ não é limitada, em virtude da conhecida desigualdade de Bernoulli: $(1 + b)^n > 1 + n \cdot b$ se $b > -1$ e $n > 1$. (Escreva $b = |a| - 1$ e note que se tem $|a|^n > c$, desde que se tome $n > (c-1)/b$.) Por outro lado, quando $|a| \le 1$, a seqüência dos números $x_n = a^n$ é limitada, pois $|x_n| \le 1$ para todo n.

Evidentemente, toda subseqüência de uma seqüência limitada é também limitada.

Seja (x_n) uma seqüência num espaço métrico M. Diz-se que o ponto $a \in M$ é *limite* da seqüência (x_n) quando, para todo número $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon$. Escreve-se então $a = \lim x_n$, $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ ou $a = \lim\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$. Diz-se também que x_n tende para a e escreve-se ainda $x_n \to a$.

Quando existe $a = \lim x_n \in M$, diz-se que a seqüência de pontos $x_n \in M$ é *convergente em* M, e converge para a. Se não existe $\lim x_n$ em M, dizemos que a seqüência é *divergente* em M.

Afirmar que $\lim x_n = a$ num espaço métrico M equivale a dizer que toda bola B de centro a (e portanto todo aberto A contendo a ou toda vizinhança V de a) contém x_n para todo valor de n, com exceção de um número finito deles (que são no máximo os pontos $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}$).

Exemplo 3. Toda seqüência constante, $x_n = a$, é convergente e $\lim x_n = a$. Se $a \in M$ é um ponto isolado e $\lim x_n = a$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todos os termos x_n com índice maior do que n_0 são iguais a a. Para ver isto, basta tomar $\varepsilon > 0$ tal que não exista em M ponto algum que diste menos de ε do ponto a. Como $\lim x_n = a$, a este ε corresponde $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon \Rightarrow x_n = a$. Em particular, num espaço métrico discreto, uma seqüência (x_n) é convergente se, e somente se, é "eventualmente constante", isto é, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_0+1} = x_{n_0+2} = \ldots$

Exemplo 4. Se o espaço métrico M possui pelo menos dois pontos distintos a, b então existem em M seqüências divergentes. Basta tomar $x_n = a$ para n ímpar e $x_n = b$ para n par. Nenhum ponto $c \in M$ pode ser limite da seqüência $(a, b, a, b, \ldots)$ assim obtida. Com efeito, se tomarmos $\varepsilon = d(a, b)/2$, nenhuma bola aberta de raio ε poderá conter ambos os pontos a, b. Portanto não existe n_0 tal que $x_n \in B(c; \varepsilon)$ para todo $n > n_0$.

As considerações que se seguem visam a facilitar um entendimento melhor da definição de limite, bem como a estabelecer uma linguagem maleável para lidar com valores "grandes" da variável inteira n.

Seja X um conjunto de números naturais. Diremos que X *contém números arbitrariamente grandes* quando, para todo $n_0 \in \mathbb{N}$ dado, pudermos encontrar $n \in X$ tal que $n > n_0$. Isto significa que X é um subconjunto ilimitado de $\mathbb{N}$ e equivale também a dizer que X é um conjunto infinito de números naturais.

Por exemplo, existem múltiplos de 3 arbitrariamente grandes, pois o conjunto $3\mathbb{N} = \{3, 6, 9, \ldots, 3n, \ldots\}$ dos múltiplos de 3 é infinito. Existem também números primos arbitrariamente grandes. Em particular, existem números naturais arbitrariamente grandes que não são múltiplos de 3. Ou seja, tanto $3\mathbb{N}$ como seu complementar $\mathbb{N} - 3\mathbb{N}$ são conjuntos infinitos.

Diremos que o conjunto $X \subset \mathbb{N}$ contém *todos os números na-*

turais suficientemente grandes quando existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow n \in X$. Isto equivale a dizer que o complementar $\mathbb{N} - X$ é finito. Em particular, X é infinito.

Por exemplo, seja X o conjunto dos números naturais n tais que $n^2 - 14n + 40 > 0$. Então $X = \{1, 2, 3, 11, 12, \dots\}$. Vemos que $n > 10 \Rightarrow n \in X$. Logo X contém todos os números naturais suficientemente grandes. Neste caso, "suficientemente grande" significa "maior do que 10". Temos $\mathbb{N} - X = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Seja (x_n) uma seqüência no espaço métrico M. Dizer que $\lim x_n = a \in M$ significa que, dada qualquer bola aberta B, de centro a, tem-se $x_n \in B$ para todo n suficientemente grande.

No Exemplo 4, dada qualquer bola $B = B(a; \varepsilon)$, tem-se $x_n \in B$ para valores arbitrariamente grandes de n, porém não para todo n suficientemente grande.

Exemplo 5. Dada a seqüência de números reais $x_n = 1/n$, temos $\lim x_n = 0$. Com efeito, dado qualquer $\varepsilon > 0$, tomamos $n_0 > 1/\varepsilon$ e vemos que

$$n > n_0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon.$$

Em termos mais geométricos: para todo n suficientemente grande, $1/n$ pertence ao intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

Proposição 1. *Toda seqüência convergente é limitada.*

Demonstração. Seja $\lim x_n = a$ num espaço métrico M. Tomando $\varepsilon = 1$, obtemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in B(a; 1)$. Portanto o conjunto dos valores da seqüência está contido na reunião $\{x_1, \dots, x_{n_0}\} \cup B(a; 1)$ de dois conjuntos limitados, logo é limitado.

Exemplo 6. A seqüência de números reais $x_n = (-1)^n$ é limitada mas não é convergente. Logo é falsa a recíproca da Proposição 1. Dado um número real a, com $|a| > 1$, a seqüência definida por $x_n = a^n$ não converge porque não é limitada. (Exemplo 2.)

Proposição 2. (Unicidade do limite.) *Uma seqüência não pode convergir para dois limites diferentes.*

Demonstração. Seja (x_n) uma seqüência no espaço métrico M, e sejam $a, b \in M$ tais que $a = \lim x_n$ e $b = \lim x_n$. Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon$. Existe também $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_1 \Rightarrow d(x_n, b) < \varepsilon$. Tomemos

agora $n \in \mathbb{N}$ maior do que n_0 e do que n_1. Então $d(a,b) \leq d(a,x_n) + d(x_n,b) < 2\varepsilon$. Segue-se que $0 \leq d(a,b) < 2\varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Isto acarreta $d(a,b) = 0$ e, portanto, $a = b$.

Segue-se da Proposição 2 que se num espaço métrico M tem-se $\lim x_n = a \in M$ e $x_n \neq a$ para todo n, então a seqüência (x_n) é divergente no espaço métrico $M - \{a\}$. Com efeito, se existisse $b \in M - \{a\}$ tal que $\lim x_n = b$, então seria $b \neq a$ e a seqüência teria dois limites distintos $a, b \in M$.

Proposição 3. *Se $\lim x_n = a$ então toda subseqüência de (x_n) converge para a.*

Demonstração. Seja $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \dots\}$ um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$. Dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon$. Existe também $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_{k_0} > n_0$. Logo

$$k > k_0 \Rightarrow n_k > n_0 \Rightarrow d(x_{n_k}, a) < \varepsilon.$$

Portanto

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = \lim_{n \in \mathbb{N}} x_n = a.$$

Corolário 1. *Se $\lim x_n = a$ então, para todo $p \in \mathbb{N}$, tem-se $\lim_n x_{n+p} = a$.*

Com efeito $(x_{n+p})_{n \in \mathbb{N}} = (x_{p+1}, x_{p+2}, \dots)$ é uma subseqüência de (x_n).

Corolário 2. *Se $\lim x_n = a \neq b$ então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \neq b$.*

Com efeito, caso contrário os índices $n \in \mathbb{N}$ tais que $x_n = b$ formariam um conjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \dots\}$ e então a subseqüência constante (x_{n_k}) teria um limite b, diferente de $a = \lim x_n$, o que é absurdo.

Exemplo 7. Se uma seqüência (x_n) possui duas subseqüências que convergem para limites distintos, então ela é divergente. De fato, pela Proposição 3, se existisse $\lim x_n = a$ então toda subseqüência de (x_n) convergiria para a. Segue-se então da Proposição 2 que nenhuma subseqüência possuiria um limite $b \neq a$.

Proposição 4. *Um ponto a, num espaço métrico M, é limite de uma subseqüência de (x_n) se, e somente se, toda bola aberta de centro a contém termos x_n com índices n arbitrariamente grandes.*

Demonstração. Se uma subseqüência $(x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots)$ converge para a então, dado $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k > k_0 \Rightarrow x_{n_k} \in B(a;\varepsilon)$. Logo toda bola $B(a;\varepsilon)$ de centro a contém termos x_n com índices arbitrariamente grandes, a saber, todos os índices n_k com $k > k_0$. Reciprocamente, supondo cumprida esta condição, a bola $B(a;1)$ contém um termo x_{n_1}, a bola $B(a;1/2)$ contém um termo x_{n_2} com índice $n_2 > n_1$, e assim por diante: para todo $k \in \mathbb{N}$, podemos achar $x_{n_k} \in B(a;1/k)$ com $n_k > n_{k-1} > \cdots > n_2 > n_1$. Isto define um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \ldots\}$ e uma subseqüência (x_{n_k}) tal que $d(x_{n_k}, a) < 1/k$. Segue-se que $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$.

Observação. No enunciado da Proposição 4, podemos substituir "bola aberta de centro a" por "conjunto aberto contendo a" ou "vizinhança de a".

A fim de reduzir certas propriedades de limites a resultados análogos sobre aplicações contínuas, consideraremos o subespaço

$$\overline{P} = \{0, 1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots\} \subset \mathbb{R}.$$

Este espaço métrico tem apenas um ponto não isolado, a saber, o ponto 0. Dada uma seqüência (x_n) num espaço métrico M, e dado um ponto $a \in M$, definiremos uma aplicação $f\colon \overline{P} \to M$ pondo $f(1/n) = x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $f(0) = a$.

Lema. *Tem-se* $\lim x_n = a$ *se, e somente se,* $f\colon \overline{P} \to M$ *é contínua.*

Demonstração. Como todo ponto $1/n \in \overline{P}$ é isolado, vemos que f é contínua se, e somente se, é contínua no ponto 0. A condição da continuidade de f no ponto 0 se exprime assim: para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que $1/n < \delta \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon$. Se esta condição é cumprida, tomamos $n_0 > 1/\delta$ e vemos que $n > n_0 \Rightarrow 1/n < 1/n_0 < \delta \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon$. Logo $\lim x_n = a$. Reciprocamente, se $\lim x_n = a$ então, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon$. Logo, pondo $1/n_0 = \delta$, vemos que $1/n < \delta \Rightarrow n > 1/\delta = n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon$. Portanto f é contínua no ponto 0.

Caracterizaremos agora convergência num espaço produto.

Proposição 5. *Uma seqüência de pontos* $z_n = (x_n, y_n)$*, no produto cartesiano* $M \times N$ *de espaços métricos, converge para o ponto* $c = (a, b) \in M \times N$ *se, e somente se,* $\lim x_n = a$ *em* M *e* $\lim y_n = b$ *em* N.

Demonstração. De acordo com o lema acima e com a Proposição 2 do Capítulo 2, as seguintes afirmações são equivalentes:

(1) $\lim z_n = c$;

(2) a aplicação $f\colon \overline{P} \to M \times N$, definida por $f(1/n) = z_n$ e $f(0) = c$, é contínua;

(3) as aplicações $f_1\colon \overline{P} \to M$ e $f_2\colon \overline{P} \to N$, definidas por $f_1(1/n) = x_n$, $f_1(0) = a$, $f_2(1/n) = y_n$ e $f_2(0) = b$, são contínuas;

(4) $\lim x_n = a$ e $\lim y_n = b$.

Corolário. *Seja* $M = M_1 \times \cdots \times M_k$ *o produto cartesiano de um número finito de espaços métricos* $M_1, \ldots, M_k$. *Uma seqüência* (x_n) *em* M *determina* k *seqüências:* $(x_{n1})_{n \in \mathbb{N}}$ *em* $M_1, \ldots, (x_{nk})_{n \in \mathbb{N}}$ *em* M_k*, onde* $x_{ni} = p_i(x_n)$ *é a* i*-ésima coordenada de* x_n. *Dado* $a = (a_1, \ldots, a_k) \in M$*, tem-se* $a = \lim_{n \to \infty} x_n$ *se, e somente se,* $a_i = \lim_{n \to \infty} x_{ni}$ *para todo* $i = 1, 2, \ldots, k$.

Ou seja, no produto cartesiano $M = M_1 \times \cdots \times M_k$, x_n converge para a se, e somente se, cada coordenada de x_n converge para a coordenada correspondente de a.

A demonstração se faz aplicando $k - 1$ vezes a Proposição 5.

Proposição 6. *Se* $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$ *num espaço vetorial normado* E *e* $\lim \lambda_n = \lambda$ *em* $\mathbb{R}$. *então* $\lim(x_n + y_n) = a + b$ *e* $\lim \lambda_n \cdot x_n = \lambda \cdot a$. *Além disso, se* $\lambda \neq 0$*, tem-se também* $\lim(1/\lambda_n) = 1/\lambda$.

Demonstração. Sejam $f, g\colon \overline{P} \to E$ definidas por $f(1/n) = x_n$, $f(0) = a$, $g(1/n) = y_n$ e $g(0) = b$. Então $(f + g)(1/n) = x_n + y_n$ e $(f + g)(0) = a + b$. As hipóteses $\lim x_n = a$ e $\lim y_n = b$ asseguram (vide Lema acima) que f e g são contínuas. Logo (Proposição 3, Capítulo 2) $f+g$ é contínua e portanto (Lema) temos $\lim(x_n+y_n) = a+b$. As demais afirmações se provam de modo análogo, devendo-se observar que, em virtude do Corolário 2 da Proposição 3, quando

$\lambda \neq 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow \lambda_n \neq 0$. Ao considerar a seqüência $(1/\lambda_n)$ nos restringimos aos índices $n > n_0$, o que não altera o limite, levando em conta o Corolário 1 da Proposição 3.

2 Seqüências de números reais

Uma seqüência (x_n) de números reais diz-se *crescente* quando se tem $x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \ldots$, isto é, $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Quando vale apenas $x_n \leq x_{n+1}$, a seqüência diz-se *não-decrescente*. Analogamente se definem seqüências *decrescentes* e *não-crescentes*. Uma seqüência de um desses quatro tipos é chamada *monótona*.

Proposição 7. *Toda seqüência monótona limitada de números reais é convergente.*

Demonstração. Para fixar as idéias, seja $(x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq \ldots)$ a seqüência limitada em questão. Tomemos $a = \sup_{n \in \mathbb{N}} \cdot x_n$. Afirmamos que $a = \lim x_n$. Com efeito, dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, o número $a - \varepsilon$, sendo menor do que a, não pode ser cota superior do conjunto dos valores x_n. Logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \varepsilon < x_{n_0} \leq a$. Então $n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq a < a + \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Isto conclui a demonstração.

Corolário. *Uma seqüência monótona de números reais é convergente se, e somente se, possui uma subseqüência limitada.*

Basta provar que uma seqüência monótona (x_n) é limitada quando possui uma subseqüência limitada $(x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots)$. Para fixar as idéias, suponhamos que (x_n) seja não-decrescente. Seja $x_{n_k} \leq c$ para todo k. Dado qualquer $n \in \mathbb{N}$, podemos obter k tal que $n < n_k$ e, então, $x_n \leq x_{n_k} \leq c$. Logo, $x_1 \leq x_n \leq c$ para todo n, o que mostra que a seqüência (x_n) é limitada.

Exemplo 8. *Se* $|a| < 1$ *então* $\lim_{n \to \infty} a^n = 0$. Aplicando diretamente a definição de limite vê-se que não há diferença alguma entre as afirmações $\lim x_n = 0$ e $\lim |x_n| = 0$. Podemos portanto admitir que $0 \leq a < 1$. Neste caso, $a \geq a^2 \geq a^3 \geq \cdots \geq a^n \geq \cdots \geq 0$ e então $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência monótona limitada. Pela Proposição 7, existe $\ell = \lim_{n \to \infty} a^n$. Sabemos que $\ell = \lim_{n \to \infty} a^{n+1} = \lim_{n \to \infty} (a \cdot a^n) =$

$a \cdot \lim_{n\to\infty} a^n = a \cdot \ell$. Logo $(1-a)\cdot \ell = 0$. Como $1-a > 0$, segue-se que $\ell = 0$.

Proposição 8. *Seja (x_n) uma seqüência de números reais, com $\lim x_n = a > b$. Então $x_n > b$ para todo n suficientemente grande.*

Demonstração. Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Tomando $\varepsilon = a - b$, obtemos $n > n_0 \Rightarrow b < x_n$, como queríamos demonstrar.

Corolário. *Se $x_n \leq b$ para valoes arbitrariamente grandes de n, e existe $a = \lim x_n$, então $a \leq b$.*

Com efeito, se fosse $a > b$, teríamos $x_n > b$ para todo n suficientemente grande, isto é, $x_n \leq b$ no máximo para um número finito de índices n.

Observação. Evidentemente valem resultados análogos à Proposição 8 e seu corolário, com $<$ e $\geq$ respectivamente.

Exemplo 9. *Se $a > 0$ então $\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$.* Suponhamos que seja $a > 1$.

Então $a > a^{1/2} > a^{1/3} > \cdots > 1$. Pela Proposição 7, existe $\ell = \lim_{n\to\infty} a^{1/n}$ e $\ell \geq 1$ pelo Corolário acima. Considerando a subseqüência

$$a^{1/n(n+1)} = a^{1/n - 1(n+1)} = a^{1/n} \div a^{1/(n+1)},$$

vemos que

$$\ell = \lim_{n\to\infty} a^{1/n(n+1)} = (\lim a^{1/n})/(\lim a^{1/(n+1)}) = 1.$$

O caso em que $0 < a < 1$ se trata de modo análogo.

3 Séries

Seja (x_n) uma seqüência num espaço vetorial normado E. Para cada $n = 1, 2, 3 \ldots$, formemos a *soma parcial* (ou *reduzida*) $S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$. Se existe $a \in E$ tal que $a = \lim_{n\to\infty} S_n$, dizemos que a é a *soma da série* $\Sigma\, x_n$, e escrevemos

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \ldots$$

Neste caso, a série $\Sigma\, x_n$ diz-se *convergente*. Quando a seqüência das somas parciais S_n não possui limite em E, dizemos que a série $\Sigma\, x_n$ é *divergente*.

Uma condição necessária para a convergência da série $\Sigma\, x_n$ é que se tenha $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Com efeito, se $a = \lim\limits_n S_n$, então $a = \lim\limits_n S_{n-1}$ também. Como $x_n = S_n - S_{n-1}$, temos:

$$\lim_n x_n = \lim_n (S_n - S_{n-1}) = \lim_n S_n - \lim_n S_{n-1} = a - a = 0.$$

Esta condição não é suficiente. O contra-exemplo clássico é dado pela *série harmônica* $\Sigma\, 1/n$. Evidentemente, temos $\lim 1/n = 0$. Mas a seqüência das somas parciais $S_n = 1+1/2+\cdots+1/n$ contém uma subseqüência ilimitada, pois

$$\begin{aligned} S_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \\ &\quad + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}+2^{n-1}}\right) > \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{2^n} = 1 + n \cdot \frac{1}{2} \cdot \end{aligned}$$

Segue-se que (S_n) não é uma seqüência convergente e portanto a série harmônica diverge.

Um exemplo importante é o da *série geométrica*:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n + \ldots$$

Aqui, a é um número real ou complexo. É conveniene começar a soma a partir de $n = 0$, para simplificar a resposta.

Quando $|a| < 1$, a série geométrica converge, e sua soma é igual a $(1-a)^{-1}$. Com efeito, um cálculo simples nos mostra que, para

$$S_n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n,$$

tem-se $S_n - a \cdot S_n = 1 - a^{n+1}$, donde $S_n = (1-a)^{-1} \cdot (1-a^{n+1})$. Como $|a| < 1$, o Exemplo 8 nos dá $\lim\limits_{n\to\infty} a^{n+1} = 0$ e portanto $\lim S_n = (1-a)^{-1}$.

Por outro lado, se for $|a| \geq 1$, a série geométrica divergirá pois neste caso a n-ésima parcela, a^n, não tende para zero.

Exemplo 9a. Seja $E = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ o conjunto das transformações lineares $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Como sabemos, toda $T \in E$ é contínua e $||T|| = \sup\{|T\cdot x|; x \in \mathbb{R}^n, |x| = 1\}$ define uma norma no espaço vetorial E. (Capítulo 2, §5.) Além disso, E vem munido de uma multiplicação (composição) tal que $||S\cdot T|| \leq ||S||\cdot||T||$. Se $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma transformação linear com $\|T\| < 1$ então $|T \cdot X| < |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e portanto $x - T \cdot x \neq 0$ para todo $x \neq 0$ em $\mathbb{R}^n$. Indicando com I a transformação linear identidade de $\mathbb{R}^n$, isto nos diz que $||T|| < 1 \Rightarrow I - T$ injetiva. Ora, sabe-se da Álgebra Linear que toda transformação linear injetiva de $\mathbb{R}^n$ em si mesmo é invertível. Assim, $||T|| < 1 \Rightarrow (I - T)^{-1}$ existe. Mostraremos agora que a "série geométrica"

$$\sum_{n=0}^{\infty} T^n = I + T + T^2 + \cdots + T^n + \ldots$$

converge no espaço vetorial normado E, e sua soma é $(I - T)^{-1}$. Com efeito, escrevendo $S_n = I + T + \cdots + T^n$, vemos, como acima, que $S_n = (I-T)^{-1}(I-T^{n+1})$. Para concluir que $\lim S_n = (I-T)^{-1}$, basta observar que

$$||T||<1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} T^{n+1} = 0, \text{ pois } ||T^{n+1}|| \leq ||T||^{n+1} \text{ e } \lim_{n\to\infty} ||T||^{n+1} = 0,$$

conforme o Exemplo 8. Note-se que, se tivéssemos um espaço vetorial normado F, de dimensão infinita, em vez de $\mathbb{R}^n$, a hipótese $||T|| < 1$ não bastaria para que $I - T\colon F \to F$ tivesse inverso. Há uma condição adicional que é preciso impor a F a fim de que isso seja verdade. Vide Capítulo 7, adiante.

Quando os termos da série $\Sigma\, x_n$ são números reais $x_n \geq 0$, as somas parciais formam uma seqüência não-decrescente $S_1 \leq S_2 \leq \cdots \leq S_n \leq \ldots$. Logo, uma série $\Sigma\, x_n$ de termos não-negativos converge se, e somente se, suas somas parciais constituem uma seqüência limitada. Ora, uma seqüência monótona é limitada se, e somente se, possui uma subseqüência limitada. Usaremos esta observação (Corolário da Proposição 7) para mostrar que a série $\Sigma\, 1/n^2$ é convergente.

Com efeito, pondo $n_k = 2^k - 1$ para cada $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned} S_{n_k} &= 1 + (1/2^2 + 1/3^2) + (1/4^2 + 1/5^2 + 1/6^2 + 1/7^2) + \cdots + \\ &\quad + (1/(2^{k-1})^2 + \cdots + 1/(2^k - 1)^2) < \\ &\quad < 1 + 2/2^2 + 4/4^2 + \cdots + 2^{k-1}/(2^{k-1})^2 = \\ &= 1 + 1/2 + 1/4 + \cdots + 1/2^{k-1}. \end{aligned}$$

Assim cada S_{n_k} é inferior à k-ésima soma parcial da série geométrica $\Sigma\, 1/2^n$. Logo, a subseqüência (S_{n_k}) é limitada e, por conseguinte, existe

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,.$$

Uma série $\sum_n x_n$, cujos termos x_n pertencem ao espaço euclidiano $\mathbb{R}^k$, é convergente se, e somente se, é convergente cada uma das séries de números reais $\sum_n x_{ni}$, $(i = 1, 2, \ldots, k)$ onde $x_{ni} = p_i(x_n) = i$-ésima coordenada do vetor x_n.

4 Convergência e topologia

Mostraremos agora que, nos espaços métricos, os conceitos topológicos introduzidos nos capítulos anteriores podem ser todos expressos mediante limites de seqüências. Começaremos com a noção de função contínua.

Proposição 9. *Sejam M, N espaços métricos. A fim de que a aplicação $f\colon M \to N$ seja contínua no ponto $a \in M$ é necessário e suficiente que $x_n \to a$ em M implique $f(x_n) \to f(a)$ em N.*

Demonstração. Seja f contínua no ponto a. Se $x_n \to a$ então, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon$. A partir de δ, obtemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \delta \Rightarrow d(f(x_n), f(a)) < \varepsilon$. Logo $\lim f(x_n) = f(a)$. Para demonstrar a recíproca suponhamos, por absurdo, que f não seja contínua no ponto a. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, nós podemos obter $x_n \in M$, com $d(x_n, a) < 1/n$ e $d(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon$. Isto nos dá uma seqüência (x_n) em M, com $x_n \to a$ sem que $f(x_n)$ convirja para $f(a)$.

Corolário 1. *Para que $f\colon M \to N$ seja contínua no ponto a, é suficiente que $x_n \to a$ implique $(f(x_n))$ convergente em$N$.*

Basta mostrar que, nestas condições, $x_n \to a$ implica $f(x_n) \to f(a)$. Ora, se $x_n \to a$, a seqüência $(z_n) = (x_1, a, x_2, a, \dots)$ converge para a. Logo $(f(z_n)) = (f(x_1), f(a), f(x_2), f(a), \dots)$ é convergente, o que implica $\lim f(x_n) = f(a)$.

Corolário 2. *Para que $f\colon M \to N$ seja contínua no ponto a, é suficiente que $x_n \to a$ implique que $(f(x_n))$ possui uma subseqüência convergindo para $f(a)$.*

Trata-se, na verdade, de um corolário da demonstração, na qual, supondo f descontínua no ponto a, obtivemos uma seqüência (x_n) com $x_n \to a$, mas nenhuma subseqüência de (x_n) pode convergir para $f(a)$.

Corolário 3. *A aplicação $f\colon M \to N$ é contínua se, e somente se, a imagem $(f(x_n))$ de toda seqüência convergente (x_n) em M é uma seqüência convergente em N. No caso afirmativo, tem-se $f(\lim x_n) = \lim f(x_n)$.*

Proposição 10. *Seja X um subconjunto de um espaço métrico M. A fim de que se tenha $a \in \overline{X}$ em M, é necessário e suficiente que a seja limite de uma seqüência de pontos $x_n \in X$.*

Demonstração. Se $a \in \overline{X}$ então, para todo $n \in \mathbb{N}$ podemos obter um ponto $x_n \in B(a; 1/n) \cap X$. Isto nos dá uma seqüência de pontos $x_n \in X$, com $d(x_n, a) < 1/n$ e portanto $\lim x_n = a$. Reciprocamente, se $a = \lim x_n$, $x_n \in X$ então toda bola aberta de centro a contém pontos x_n pertencentes a X. Logo $a \in \overline{X}$.

Corolário 1. *A fim de que o ponto a pertença à fronteira do conjunto X, é necessário e suficiente que a seja limite de uma seqüência de pontos $x_n \in X$ e de uma seqüência de pontos $y_n \in M - x$.*

Com efeito, a fronteira de X é $\partial X = \overline{X} \cap \overline{M - X}$.

Corolário 2. *Um subconjunto $X \subset M$ é denso no espaço métrico M se, e somente se, todo ponto de M é limite de uma seqüência de pontos de X.*

Corolário 3. *A fim de que um conjunto F seja fechado em M, é necessário e suficiente que ele contenha o limite de cada seqüência de pontos $x_n \in F$ que convirja em M.*

Ou seja, $F \subset M$ é fechado se, e somente se, $x_n \in F$, $x_n \to a \in M$ $\Rightarrow a \in F$. (Isto diz que F é fechado relativamente à operação de tomar limites em M.)

A demonstração do Corolário 3 se faz apelando para a Proposição 10 e observando que F é fechado se, e somente se, $F \supset \overline{F}$.

Proposição 11. *Um conjunto A é aberto em M se, e somente se, cumpre a seguinte condição: $x_n \to a \in A \Rightarrow x_n \in A$ para todo n suficientemente grande.*

Demonstração. Se A é aberto e $x_n \to a \in A$ então existe uma bola $B(a;\varepsilon) \subset A$ e portanto existe n_0 tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in B(a;\varepsilon) \subset A$. Reciprocamente, supondo cumprida a condição, dada uma seqüência de pontos $x_n \in M - A$ com $\lim x_n = b$, não se pode ter $b \in A$, logo $b \in M - A$. Assim, $M - A$ é fechado (vide Corolário 3 acima) e conseqüentemente A é aberto.

Proposição 12. *A fim de que a seja ponto de acumulação de um conjunto $X \subset M$ é necessário e suficiente que a seja limite de uma seqüência de pontos distintos $x_n \in X$.*

Demonstração. A condição é evidentemente suficiente. Suponhamos agora $a \in X'$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, a bola aberta $B(a;1/n)$ contém uma infinidade de pontos de X. Podemos então escolher sucessivamente os pontos $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ de tal modo que $x_n \in X$, $x_n \in B(a;1/n)$, mas x_n não é nenhum dos pontos $x_1, \ldots, x_{n-1}$ escolhidos anteriormente. Então $m \neq n \Rightarrow x_m \neq x_n$ e, como $d(x_n, a) < 1/n$, temos $\lim x_n = a$.

Exemplo 10. Vimos na Proposição 8 que $\lim x_n = a > b$ na reta implica $x_n > b$ para todo n suficientemente grande. Isto é um caso particular da Proposição 11 pois o conjunto $(b, +\infty)$, dos pontos $x > b$ é aberto na reta. Também o Corolário da Proposição 8, segundo o qual $x_n \leq b$ para todo $n \Rightarrow \lim x_n \leq b$ (caso $\lim x_n$ exista) decorre, como caso particular, do Corolário 3 da Proposição 10 pois o conjunto $(-\infty, b]$ dos pontos $x \leq b$ é fechado na reta.

Exemplo 11. A noção de limite de uma seqüência e os resultados acima estabelecidos permitem dar demonstrações bastante intuitivas de alguns fatos topológicos. Por exemplo, dado $X \subset M$ limitado e não-vazio, mostraremos que $\operatorname{diam} X = \operatorname{diam} \overline{X}$. Seja $c = \operatorname{diam} X$. Dados $x, y \in \overline{X}$ quaisquer, temos $x = \lim x_n$ e $y = \lim y_n$,

com $x_n, y_n \in X$ para todo n. Então $d(x_n, y_n) \leq c$ para todo n e, por conseguinte $d(x, y) = d(\lim x_n, \lim y_n) = \lim d(x_n, y_n) \leq c$. [A segunda igualdade deve-se à continuidade da função d, e a desigualdade ao Corolário da Proposição 8.] Portanto $\operatorname{diam} \overline{X} \leq \operatorname{diam} X$. Como é evidente que $\operatorname{diam} X \leq \operatorname{diam} \overline{X}$, concluímos que X e $\overline{X}$ têm diâmetros iguais.

Exemplo 12. Sejam $f, g \colon M \to N$ contínuas. O conjunto F dos pontos $x \in M$ tais que $f(x) = g(x)$ é fechado em M. Com efeito, dada uma seqüência de pontos $x_n \in F$, com $\lim x_n = a \in M$, temos $f(x_n) = g(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue-se daí que $f(a) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = \lim g(x_n) = g(\lim x_n) = g(a)$. Logo $a \in F$ e portanto F é fechado.

Exemplo 13. Sejam $f, g \colon M \to N$ aplicações contínuas. Se $f(x) = g(x)$ para todo ponto x pertencente a um subconjunto $X \subset M$ então $f(y) = g(y)$ para todo $y \in \overline{X}$. Com efeito, o conjunto dos pontos $x \in M$ nos quais $f(x) = g(x)$ é fechado e contém X, logo contém $\overline{X}$. Em particular, se as funções contínuas $f, g \colon M \to N$ coincidem num subconjunto denso $X \subset M$ então $f = g$. Mais em particular: sejam $f, g \colon I \to \mathbb{R}$ contínuas num intervalo I. Se $f(x) = g(x)$ para todo $x \in I$ racional, então $f = g$.

5 Seqüências de funções

Há diferentes maneiras de se definir o que se entende quando se diz que "uma seqüência de aplicações $f_n \colon X \to M$, tomando valores num espaço métrico M, converge para a aplicação $f \colon X \to M$". Entre os diversos tipos de convergência, os mais naturais e comuns são a convergência simples e a convergência uniforme.

Diz-se que a seqüência de aplicações $f_n \colon X \to M$ (definidas num conjunto arbitrário X e tomando valores num espaço métrico M) converge *simplesmente* (ou *pontualmente*) em X para a aplicação $f \colon X \to M$ quando, para cada $x \in X$, a seqüência $(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots)$ tem limite $f(x)$ em M. Ou seja, pra cada $x \in X$, tem-se $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$.

Isto significa, evidentemente, que, dados arbitrariamente $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (dependendo de x e de ε) tal que $n > n_0 \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$.

Exemplo 14. A seqüência de funções $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dadas por $f_n(x) = x/n$, converge simplesmente em $\mathbb{R}$ para a função identicamente nula. Com efeito, para cada $x \in \mathbb{R}$ fixado, tem-se $\lim_{n\to\infty} x/n = 0$. Mais detalhadamente: dados $x \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$, tomamos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > |x|/\varepsilon$. Então $n > n_0 \Rightarrow |x/n| < \varepsilon$. Note-se que, mesmo mantendo $\varepsilon > 0$ fixo, não se pode determinar um número natural n_0 que seja satisfatório para todos os pontos $x \in \mathbb{R}$.

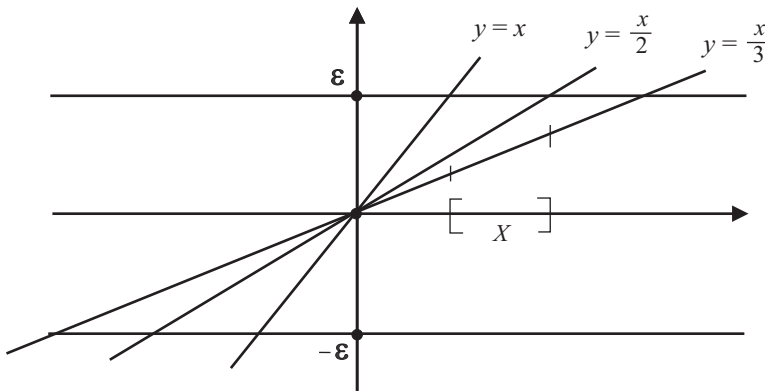
Diremos que a seqüência de aplicações $f_n \colon X \to M$ converge *uniformemente* em X para a aplicação $f \colon X \to M$ quando, para todo número real $\varepsilon > 0$ dado, for possível obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$, *qualquer que seja* $x \in X$.

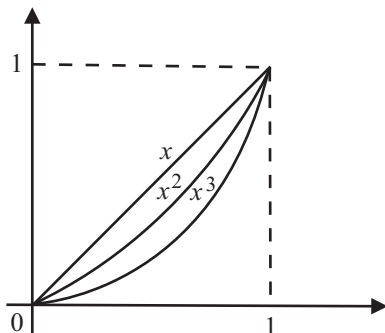
A expressão grifada acima contém a essência da uniformidade: o número natural n_0, escolhido a partir do $\varepsilon > 0$ dado, é satisfatório em todos os pontos $x \in X$.

Evidentemente, se $f_n \to f$ uniformemente em X então $f_n \to f$ simplesmente em X. Em particular, se sabemos que $f_n \to f$ simplesmente em X, então (f_n) não pode convergir uniformemente em X paa outra aplicação que não seja f.

Exemplo 15. A seqüência de funções $f_n(x) = x/n$ converge uniformemene para (a função) 0 em qualquer subconjunto limitado $X \subset \mathbb{R}$. De fato, se $|x| \leq c$ para todo $x \in X$, então, dado $\varepsilon > 0$, basta tomar $n_0 > c/\varepsilon$. Feito isto, $n > n_0 \Rightarrow |x/n| \leq c/n < \varepsilon$ qualquer que seja $x \in X$. Por outro lado, a seqüência de funções $f_n(x) = x/n$ não converge uniformemente em $\mathbb{R}$. Com efeito, se tomarmos $\varepsilon = 1$, por exemplo, seja qual for $n_0 \in \mathbb{N}$ escolhido, podemos achar $n > n_0$ e $x \in \mathbb{R}$ tais que $|x/n| > 1$. Basta tomar primeiro $n > n_0$ e depois $x > n$. Isto mostra que a convergência $x/n \to 0$ não é uniforme em $\mathbb{R}$. Como observamos acima, daí decorre que x/n não converge uniformemente em $\mathbb{R}$ para função alguma.

Estas considerações podem ser visualizadas geometricamente. O gráfico da função $f_n(x) = x/n$ é a reta $y = x/n$, que passa pela origem e tem inclinação $1/n$. Dizer que $f_n \to 0$ uniformemente significa afirmar que cada faixa horizontal $\mathbb{R} \times (-\varepsilon, \varepsilon) =$

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; -\varepsilon < y < \varepsilon\}$ contém os gráficos de todas as funções f_n salvo, no máximo um número finito deles.

Ora, nenhuma reta $y = x/n$, por maior que seja n, está inteiramente contida numa faixa horizontal. No entanto, se fixamos um conjunto limitado $X \subset \mathbb{R}$ veremos que, dado $\varepsilon > 0$, para todo n suficientemente grande, a parte da reta $y = x/n$ situada sobre X está contida na faixa $\mathbb{R} \times (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Exemplo 16. A seqüência de funções $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, definidas por $f_n(x) = x^n$, converge simplesmente em $[0,1]$ para a função $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = 0$ se $0 \leq x < 1$ e $f(1) = 1$. Com efeito, fixado $x \in [0,1)$, o Exemplo 8 nos dá $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$, enquanto $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(1) = \lim\limits_{n\to\infty} 1^n = 1$. Mas esta convergência não é uniforme em $[0,1]$. Na realidade, não é uniforme mesmo no intervalo menor $[0,1)$ pois, tomando ε tal que $0 < \varepsilon < 1$, por maior que seja n, existirão sempre pontos $x \in [0,1)$ tais que $f_n(x) - f(x) = x^n \geq \varepsilon$. Basta tomar x tal que $\sqrt[n]{\varepsilon} \leq x < 1$. Por outro lado, em todo intervalo da forma $[0, 1-\delta]$, $0 < \delta < 1$, temos $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$ uniformemente. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, como $\lim\limits_{n\to\infty} (1-\delta)^n = 0$, segue-se que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ al que $n > n_0 \Rightarrow (1-\delta)^n < \varepsilon$. Portanto, para todo $x \in [0, 1-\delta]$, e todo $n > n_0$, temos $0 \leq x^n \leq (1-\delta)^n < \varepsilon$.

Mostraremos agora que a convergência uniforme pode ser interpretada como convergência de pontos num espaço métrico conveniente.

Considerar funções como pontos de um espaço métrico, no qual a distância foi definida de modo a originar um tipo adequado de convergência, é uma das técnicas usuais da Análise Funcional.

Na proposição seguinte, X é um conjunto arbitrário e M é um espaço métrico. São consideradas ainda uma aplicação $f\colon X \to M$ e uma seqüência de aplicações $f_n\colon X \to M$.

Proposição 13. *Se $f_n \to f$ uniformemente em X então, para todo n suficientemente grande, f_n está a uma distância finita de f e $\lim f_n = f$ no espaço métrico $\mathcal{B}_f(X; M)$. Reciprocamente, se $\lim f_n = f$ em $\mathcal{B}_f(X; M)$, então $f_n \to f$ uniformemente em X.*

Demonstração. Basta observar que, sendo $d(f_n, f) = \sup_{x\in X} d(f_n(x), f(x))$, tem-se $d(f_n, f) < \varepsilon \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ para todo $x \in X$ e, por outro lado, $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ para todo $x \in X \Rightarrow d(f_n, f) \leq \varepsilon$.

Em particular, se $f_n \to f$ uniformemente e f é limitada então, para todo n suficientemente grande, f_n é limitada.

Exemplo 16a. Seja E um espaço vetorial normado. São dadas as seqüências de aplicações $f_n, g_n\colon X \to E$ e também $f, g\colon X \to E$. Se $f_n \to f$ e $g_n \to g$ uniformemente em X então $f_n + g_n \to f + g$ uniformemente em X, como se vê imediatamente. Se for dada ainda uma seqüência de funções $\lambda_n\colon X \to \mathbb{R}$, convergindo uniformemente em X para a função $\lambda\colon X \to \mathbb{R}$, então a seqüência de aplicações $\lambda_n \cdot f_n\colon X \to E$, definidas por $(\lambda_n \cdot f_n)(x) = \lambda_n(x) \cdot f_n(x)$, converge simplesmente para $\lambda \cdot f\colon X \to E$. A convergência é uniforme se λ e f são aplicações limitadas. Com efeito, suponhamos que se tenha

$|\lambda(x)| \leq a$ e $|f(x)| \leq b$ para todo $x \in X$. Então, da identidade $\lambda_n \cdot f_n - \lambda \cdot f = (\lambda_n - \lambda) \cdot (f_n - f) + \lambda \cdot (f_n - f) + (\lambda_n - f) \cdot f$, resulta que, para todo $x \in X$ e todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$|\lambda_n(x) \cdot f_n(x) - \lambda(x) \cdot f(x)| \leq |\lambda_n(x) - \lambda(x)| \cdot |f_n(x) - f(x)| + \\ + a \cdot |f_n(x) - f(x)| + b \cdot |\lambda_n(x) - \lambda(x)|.$$

Daí se conclui facilmente que $\lambda_n \cdot f_n \to \lambda \cdot f$ uniformemente em X. Note que a hipótese de λ e f serem ambas limitadas é essencial, como se conclui do Exemplo 15, onde $\lambda_n(x) = 1/n$, $f_n(x) = x$, $\lambda(x) = 0$, $f(x) = x$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in \mathbb{R}$. As convergências $\lambda_n \to \lambda$ e $f_n \to f$ são uniformes em $\mathbb{R}$. Além disso, λ é limitada. Mas f não é. Por isso, é que $\lambda_n \cdot f_n = x/n$ não converge uniformemente para 0 em $\mathbb{R}$. Por outro lado, $\lambda_n \cdot f_n \to 0$ uniformemente em cada parte limitada $X \subset \mathbb{R}$ porque $f(x) = x$ é uma função limitada em X.

Proposição 14. *Sejam M, N espaços métricos. Se uma seqüência de aplicações $f_n \colon M \to N$, contínuas no ponto $a \in M$, converge uniformemente em M para uma aplicação $f \colon M \to N$ então f é contínua no ponto a.*

Demonstração. Seja F o conjunto das aplicações $g \colon M \to N$ que estão a uma distância finita de f e são contínuas no ponto $a \in M$. Sabemos que F é um subconjunto fechado do espaço métrico $\mathcal{B}_f(M; N)$. (Vide Exemplo 24, Capítulo 3.) Para todo n suficientemente grande, temos $f_n \in F$. Como $\lim f_n = f$ em $\mathcal{B}_f(M; N)$, segue-se do Corolário 3 da Proposição 10 que $f \in F$, ou seja, f é contínua no ponto a.

Segunda demonstração. Para provar que f é contínua no ponto a, supomos dado $\varepsilon > 0$ e escolhemos um número natural n tal que $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon/3$ para todo $x \in X$. Como f_n é contínua no ponto a, existe $\delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta$ em M implica $d(f_n(x), f_n(a)) < \varepsilon/3$. Então, para todo $x \in M$ com $d(x, a) < \delta$, temos:

$$d(f(x), f(a)) \leq d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(a)) + d(f_n(a), f(a)) < \\ < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Corolário. *O limite uniforme de uma seqüência de aplicações contínuas $f_n \colon M \to N$ é uma aplicação contínua $f \colon M \to N$.*

6 Produtos cartesianos infinitos

Dada uma família infinita enumerável de espaços métricos $M_1, M_2, \ldots, M_i, \ldots$, seu produto cartesiano $M = \prod_{i=1}^{\infty} M_i$ é o conjunto de todas as seqüências $x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots)$ onde $x_i \in M_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Os pontos $x_i \in M_i$ são chamados as *coordenadas* do ponto $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

Para cada $i \in \mathbb{N}$, a *i-ésima projeção* $p_i \colon M \to M_i$, definida por $p_i(x) = x_i$, associa a cada ponto $x = (x_i)$ do produto cartesiano $M = \prod_{i=1}^{\infty} M_i$ sua i-ésima coordenada.

Desejamos introduzir uma métrica no produto cartesiano enumerável, chamada "métrica produto", a qual deverá caracterizar-se pelo fato de que uma aplicação $f \colon M \to \prod_{i=1}^{\infty} N_i$ será contínua se, e somente se, cada uma de suas coordenadas $p_i \circ f \colon M \to N_i$ for contínua.

Faremos inicialmente a seguinte hipótese sobre os espaços métricos (M_i, d_i), cujo produto estamos considerando:

Existe, para cada $i \in \mathbb{N}$, uma constante $c_i > 0$ tal que a série $\sum_{i=1}^{\infty} c_i$ é convergente e $d_i(x_i, y_i) \leq c_i$ sejam quais forem $x_i, y_i \in M_i$.

Definiremos então a *métrica produto* em $M = \prod_{i=1}^{\infty} M_i$, pondo, para $x = (x_i)$ e $y = (y_i)$ em M:

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} d_i(x_i, y_i).$$

Em virtude da hipótese feita sobre os espaços M_i, a série acima converge e, como se vê facilmente, $d(x, y)$ satisfaz os axiomas que definem uma métrica. O par (M, d) é chamado o *espaço métrico produto* dos espaços M_i.

As projeções $p_i \colon (M, d) \to (M_i, d_i)$ são contrações fracas e portanto são aplicações contínuas do produto $\prod M_i$ em cada um dos seus fatores M_i.

Segue-se daí que se tomarmos um aberto $A_i \subset M_i$, sua imagem inversa $p_i^{-1}(A_i)$ é um subconjunto aberto do produto M. Ora,

temos:

$$p_i^{-1}(A_i) = \{x \in \prod M_i\,; x_i \in A_i\} = \\ = M_1 \times \cdots \times M_{i-1} \times A_i \times M_{i+1} \times M_{i+2} \times \ldots\,,$$

e por isso o conjunto acima é chamado a "fatia aberta de largura A_i". Como a interseção de um número finito de conjuntos abertos é ainda um aberto, vemos que, tomando $A_1 \subset M_1, \ldots, A_n \subset M_n$ abertos nestes fatores, o conjunto

$$A = A_1 \times \cdots \times A_n \times \prod_{i>n} M_i$$

é aberto no produto cartesiano M, pois $A = p_1^{-1}(A_1) \cap \cdots \cap p_n^{-1}(A_n)$ é interseção de fatias abertas. Os conjuntos A do tipo acima são chamados *abertos básicos* do produto cartesiano $\prod\limits_{i=1}^{\infty} M_i$.

Proposição 15. *Todo subconjunto aberto $U \subset \prod\limits_{i=1}^{\infty} M_i$ é reunião de abertos básicos.*

Demonstração. Para todo $x \in U$ existe $r > 0$ tal que $B(x;r) \subset U$. Como a série $\Sigma\, c_i$ é convergente, podemos obter n tal que $\sum\limits_{i>n} c_i < r/2$. Para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, seja $A_i = B(x_i, r/2n)$ bola de centro x_i e raio $r/2n$ no espaço M_i. Afirmamos que o aberto básico $A_x = A_1 \times \cdots \times A_n \times \prod\limits_{i>n} M_i$ está contido em $B(x;r)$ e portanto em U. Com efeito

$$y = (y_i) \in A_x \Rightarrow d_1(y_1, x_1) < \frac{r}{2n}, \ldots, d_n(y_n, x_n) < \frac{r}{2n} \\ \Rightarrow d(y,x) = \sum_{i \leq n} d_i(x_i, y_i) + \sum_{i>n} d_i(x_i, y_i) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$$

pois

$$\sum_{i>n} d_i(x_i, y_i) \leq \sum_{i>n} c_i < \frac{r}{2}\,.$$

Temos então, para cada $x \in U$, um aberto básico A_x tal que $x \in A_x \subset U$. Segue-se que $U = \bigcup\limits_{x \in U} A_x$.

Corolário. *As projeções* $p_i \colon M \to M_i$ *são aplicações (contínuas e) abertas do produto* $M = \prod_{i=1}^{\infty} M_i$.

Se $A = A_1 \times \cdots \times A_n \times \prod_{i>n} M_i$ é um aberto básico, então $p_i(A) = A_i$ para $i \le n$ e $p_i(A) = M_i$ se $i > n$. Logo $p_i(A)$ é aberto em M_i . Dado um aberto qualquer $U \subset M$, temos $U = \cup A_x$, reunião de abertos básicos. Logo $p_i(U) = p_i(\bigcup_x A_x) = \bigcup_x p_i(A_x)$ é uma reunião de abertos e portanto é um aberto em M_i .

Proposição 16. *Uma aplicação* $f \colon N \to \prod_{i=1}^{\infty} M_i$ *é contínua se, e somente se, cada uma de suas coordenadas* $f_i = p_i \circ f \colon N \to M_i$ *é contínua.*

Demonstração. Se f é contínua, então cada $f_i = p_i \circ f$ é contínua como composta de aplicações contínuas. Reciprocamente, supondo cada f_i contínua, dado um aberto básico $A = A_1 \times \cdots \times A_n \times \prod_{i>n} M_i$, temos $A = p_1^{-1}(A_1) \cap \cdots \cap p_n^{-1}(A_n)$, donde

$$\begin{aligned} f^{-1}(A) &= f^{-1}\, p_1^{-1}(A_1) \cap \cdots \cap f^{-1}\, p_n^{-1}(A_n) = \\ &= (p_1 \circ f)^{-1}(A_1) \cap \cdots \cap (p_n \circ f)^{-1}(A_n) = \\ &= f_1^{-1}(A_1) \cap \cdots \cap f_n^{-1}(A_n). \end{aligned}$$

Logo $f^{-1}(A)$ é aberto em N. O aberto mais geral no produto $\prod M_i$ é uma reunião $U = \bigcup_x A_x$ de abertos básicos. Logo $f^{-1}(U) = \bigcup_x f^{-1}(A_x)$ é um subconjunto aberto de N. Segue-se da Proposição 3, Capítulo 3, que f é contínua.

Corolário. *Uma seqüência de pontos* $x_n \in M = \prod_{i=1}^{\infty} M_i$ *converge para o limite* $a \in M$ *se, e somente se, para cada* $i \in \mathbb{N}$, *a seqüência* $(x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ni}, \ldots) = (x_{ni})_{n \in \mathbb{N}}$, *converge em* M_i *para o limite* a_i . *Ou seja,* $\lim_{n \to \infty} x_n = a \Leftrightarrow$ *para cada* $i \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \to \infty} x_{ni} = a_i$.

Este corolário resulta da Proposição 16 do mesmo modo como foi demonstrada a Proposição 5. Observamos ainda que o corolário acima poderia ter sido demonstrado diretamente. A Proposição 16 resulta imediatamente dele, em virtude da Proposição 9.

Proposição 17. *Uma métrica em* $\prod_{i=1}^{\infty} M_i$ *é equivalente à métrica produto se, e somente se, cumpre a Proposição* 16 *ou* (*o que é o mesmo*) *seu corolário.*

Demonstração. Sejam d a métrica produto e ρ outra métrica em $M = \prod M_i$ em relação à qual a Proposição 16 é verdadeira. Como a aplicação identidade $(M, \rho) \to (M, \rho)$ é contínua, segue-se que cada projeção $p_i \colon (M, \rho) \to M_i$ é contínua. Então, como d cumpre a Proposição 16, vemos que a aplicação identidade $\alpha \colon (M, \rho) \to (M, d)$ é contínua. De modo semelhante se mostra que a aplicação identidade $\beta \colon (M, d) \to (M, \rho)$ é contínua. Logo as métricas d e ρ são equivalentes. A recíproca é óbvia: se ρ é equivalente à métrica produto d então as aplicações contínuas $f \colon N \to (M, d)$ e $f \colon N \to (M, \rho)$ são as mesmas. Por conseguinte, ρ cumpre a Proposição 16. Quanto ao Corolário, se ele é válido para ρ e a métrica produto d então estas duas métricas determinam a mesma noção de limite no produto cartesiano $M = \prod M_i$ e portanto os abertos de M são os mesmos segundo d ou segundo ρ. (Vide Proposição 11.) Então d e ρ são equivalentes. (Corolário da Proposição 4, Capítulo 3.) A recíproca é óbvia.

Proposição 18. *Para cada* $i \in \mathbb{N}$, *seja* $X_i \subset M_i$. *O fecho do produto cartesiano* $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ *em* $M = \prod_{i=1}^{\infty} M_i$ *é dada por* $\overline{\prod X_i} = \prod \overline{X}_i$.

Demonstração. Um ponto $a \in M$ é aderente a $\prod X_i$ se, e somente se, $a = \lim x_n$, onde cada $x_n \in \prod X_i$. Pelo Corolário da Proposição 16, isto equivale a dizer que $a = (a_1, a_2, \dots, a_i, \dots)$, onde cada $a_i = \lim_{n \to \infty} x_{ni}$ pertence ao fecho do conjunto X_i, ou seja $a \in \prod \overline{X}_i$. Por conseguinte, $\overline{\prod X_i} = \prod \overline{X}_i$.

Corolário 1. *Se, para cada* $i \in \mathbb{N}$, $F_i \subset M_i$ *é fechado, então* $\prod_{i=1}^{\infty} F_i$ *é fechado no produto* $\prod_{i=1}^{\infty} M_i$.

Corolário 2. *Se cada* $X_i \subset M_i$ *é denso* ($i = 1, 2, \dots$) *então* $\prod X_i$ *é denso em* $\prod M_i$.

Observações. 1) Se $\prod X_i$ é fechado em $\prod M_i$ então, para cada $i \in \mathbb{N}$, X_i é fechado em M_i, pois $\prod X_i = \overline{\prod X_i} = \prod \overline{X}_i \Rightarrow$

$X_i = \overline{X}_i$ para cada i. Entretanto a projeção de um subconjunto fechado $F \subset \prod M_i$ num dos fatores M_i pode não ser fechada. (Vide Exemplo 21, Capítulo 3.)

2) Não é verdade que o produto cartesiano $A = A_1 \times \cdots \times A_i \times \ldots$ de uma infinidade de conjuntos abertos $A_i \subset M_i$ seja aberto no produto $M = \prod M_i$. Para que $A = \prod A_i$ seja aberto em M é suficiente que exista $n \in \mathbb{N}$ tal que $i > n \Rightarrow A_i = M_i$, pois neste caso A será um aberto básico. Esta condição também é necessária (quando A não é vazio) pois se $A = \prod A_i$ é aberto não-vazio, tomando $x \in A$, podemos (pela Proposição 15) obter um aberto básico $A' = A'_1 \times \cdots \times A'_n \times \prod\limits_{i>n} M_i$ tal que $x \in A' \subset A$. Logo $A_i = M_i$ para todo $i > n$.

3) Resulta do fato de cada $p_i \colon \prod M_i \to M_i$ ser uma sobrejeção contínua que a projeção de um subconjunto denso $X \subset \prod M_i$ em cada um dos fatores M_i é densa em M_i.

Vejamos agora como definir uma métrica no produto cartesiano $M = \prod\limits_{i=1}^{\infty} M_i$ quando os fatores M_i são espaços métricos quaisquer, aos quais não se impõe a condição $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \operatorname{diam}(M_i) < \infty$.

Substitui-se em cada espaço (M_i, ρ_i) sua métrica original ρ_i por outra d_i, que lhe seja equivalente e que, além disso, cumpra $d_i(x_i, y_i) \leq 1/2^i$ para $x_i, y_i \in M_i$ quaisquer. Definimos então a métrica produto d em $M = \prod\limits_{i=1}^{\infty} M_i$, pondo, como antes, $d(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} d_i(x_i, y_i)$.

Como a série geométrica $\sum \dfrac{1}{2^i}$ é convergente, valem todas as conclusões já estabelecidas neste §6. Em particular, é válida a Proposição 17, segundo a qual a escolha das métricas d_i dentro das condições acima impostas não afeta a classe de equivalência da métrica produto d.

Podemos ainda ser mais explícitos e definir a métrica produto em $M = \prod M_i$, onde $M_i = (M_i, \rho_i)$, pondo

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{\rho_i(x_i, y_i)}{1 + \rho_i(x_i, y_i)}\,.$$

Isto equivale a substituir, em cada espaço M_i, sua métrica original ρ_i por $d_i = 1/2^i \cdot \rho_i/(1+\rho_i)$ a qual, como se sabe, é equivalente a ρ_i.

Se $M_1 = M_2 = \cdots = M_i = \cdots = M$, então o produto cartesiano $\prod_{i=1}^{\infty} M_i$ é igual ao conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{N}, M)$ de todas as aplicações $x\colon \mathbb{N} \to M$, isto é, de todas as seqüências em M. Quando X é um conjunto infinito enumerável, podemos fixar uma bijeção entre X e $\mathbb{N}$ e, através dela, aplicar a $\mathcal{F}(X; M)$ todas as propriedades válidas para $\prod_{i=1}^{\infty} M_i = M^{\mathbb{N}}$. Em particular, o Corolário da Proposição 16 nos diz que, quando X é enumerável, dado um espaço métrico qualquer M, existe uma métrica em $\mathcal{F}(X; M)$ relativamente à qual se tem $\lim f_n = f$ se, e somente se, $f_n \to f$ simplesmente em X. Mais explicitamente, podemos (com uma mudança drástica de notação!) supor $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots\}$ e definir a distância entre duas funções $f, g\colon X \to M$ pondo:

$$d(f,g) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{d(f(x_i), f(y_i))}{1 + d(f(x_i), f(y_i))} \,.$$

Portanto, quando X é enumerável, a convergência simples de uma seqüência de função $f_n\colon X \to M$ provém de uma métrica. Para conjuntos não-enumeráveis, este resultado não prevalece. Mostraremos, por exemplo, no Capítulo 7, que não existe métrica alguma no conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{R}; [0,1]) = \mathcal{B}(\mathbb{R}; [0,1])$ relativamente à qual a convergência $\lim f_n = f$ coincida com a convergência simples. Esta situação contrasta com a da convergência uniforme. (Vide Proposição 13.)

7 Limites de funções

Sejam X um subconjunto do espaço métrico M, $a \in \overline{X}$ um ponto aderente a X e $f\colon X \to N$ uma aplicação definida em X e tomando valores num espaço métrico N.

Diz-se que um ponto $b \in N$ é o *limite* de $f(x)$ quando x tende para a, e escreve-se

$$b = \lim_{x \to a} f(x),$$

quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado é possível obter $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $d(x,a) < \delta \Rightarrow d(f(x),b) < \varepsilon$.

Quando a pertence ao domínio X da aplicação $f\colon X \to N$, a definição acima nada apresenta de novo: tem-se $\lim_{x\to a} f(x) = b$ se, e somente se, f é contínua no ponto a e $b = f(a)$.

Com efeito, se f é contínua no ponto a, é imediato que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Reciprocamente, se existe $b = \lim_{x\to a} f(x)$ então, para todo $\varepsilon > 0$ tem-se $d(f(a),b) < \varepsilon$ pois $d(a,a) < \delta$ para todo $\delta > 0$. Segue-se que $b = f(a)$ e a definição de limite nos dá então que f é contínua no ponto a.

A noção de limite portanto tem interesse apenas nos casos de $\lim_{x\to a} f(x)$ em que a é um ponto aderente a X mas que não pertence a X. Mesmo assim, manteremos a definição geral, na qual se supõe apenas que se tenha $a \in \overline{X}$.

Proposição 19. *Seja $a \in \overline{X} \subset M$. Dada $f\colon X \to N$, tem-se $\lim_{x\to a} f(x) = b \in N$ se, e somente se, para toda seqüência de pontos $x_n \in X$, com $x_n \to a$, tem-se $\lim f(x_n) = b$.*

Demonstração. Faz-se de modo inteiramente análogo à da Proposição 9.

Corolário. *Para que exista $\lim_{x\to a} f(x)$ em N é suficiente que, para toda seqüência de pontos $x_n \in X$ com $x_n \to a$, a seqüência $(f(x_n))$ seja convergente em N.*

Em primeiro lugar, sejam quais forem as seqüências de pontos $x_n, y_n \in X$, com $\lim x_n = \lim y_n = a$, devemos ter $\lim f(x_n) = \lim f(y_n)$ pois se fosse $\lim f(x_n) \neq \lim f(y_n)$, a nova seqüência $(z_n) = (x_1, y_1, x_2, y_2, \dots)$ cumpriria $\lim z_n = a$ mas $(f(z_n))$ teria duas subseqüências com limites distintos e portanto não seria convergente. Seja $b \in N$ o limite comum de todas as seqüências $(f(x_n))$ onde $x_n \to a$, $x_n \in X$. Segue-se da Proposição 19 que $\lim_{x\to a} f(x) = b$.

Proposição 20. *Sejam M, N espaços métricos, X um subespaço de M e $f\colon X \to N$ uma aplicação contínua. Se, para cada ponto $a \in \overline{X}$, existe o limite $\lim_{x\to a} f(x)$ então a aplicação $F\colon \overline{X} \to N$, definida por $F(x) = f(x)$ quando $x \in X$ e $F(y) = \lim_{x\to y} f(x)$ quando $y \in \overline{X} - X$, é contínua.*

Demonstração. Como f é contínua em todo ponto $a \in X$, segue-se que, seja qual for $a \in \overline{X}$, temos $F(a) = \lim_{x \to a} f(x)$. Logo, dados $a \in \overline{X}$ e $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $d(x,a) < \delta \Rightarrow d(f(x), F(a)) < \varepsilon/2$. Afirmamos que, para todo $\overline{x} \in \overline{X}$, com $d(\overline{x}, a) < \delta$, temos $d(F(\overline{x}), F(a)) < \varepsilon$. Com efeito, é $\overline{x} = \lim x_n$, onde $x_n \in X$ para todo n e, sem perda de generalidade podemos admitir que $d(x_n, a) < \delta$ para todo $n \in \mathbb{N}$. (Aplique a Proposição 11 ao aberto $B(a;\delta)$.) Portanto, $d(f(x_n), F(a)) < \varepsilon/2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como

$$F(\overline{x}) = \lim_{x \to \overline{x}} f(x) = \lim_{n \to \infty} f(x_n),$$

segue-se que

$$d(F(\overline{x}), F(a)) = \lim_{n \to \infty} d(f(x_n), F(a)) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Observação. Dada $f \colon X \to N$ contínua, com $X \subset M$, nem sempre existe $\lim_{x \to a} f(x)$ para todo $a \in \overline{X}$. Por exemplo, $f(x) = \text{sen}(1/x)$ é contínua na semi-reta $X = (0, +\infty) \subset R$ mas não existe $\lim_{x \to 0} f(x)$.

Exemplo 17. Seja $I = (a,b)$ um intervalo aberto da reta. Se $f \colon (a,b) \to \mathbb{R}$ é monótona limitada, então existem sempre os limites $\lim_{x \to a} f(x)$ e $\lim_{x \to b} f(x)$. Para fixar as idéias, suponhamos f não-decrescente e mostremos, por exemplo, que existe $\lim_{x \to b} f(x) = L$. Basta tomar, neste caso, $L = \sup\{f(x); a < x < b\}$. Dado $\varepsilon > 0$ arbitrariamente, a definição de sup nos permite obter $x_0 = b - \delta$ em (a,b) tal que $L - \varepsilon < f(x_0) \leq L$. Segue-se da monotonicidade de f que $b - \delta < x < b \Rightarrow L - \varepsilon < f(x_0) \leq f(x) \leq L < L + \varepsilon$ ou, simplificando: $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$. Logo, $\lim_{x \to b} f(x) = L$.

EXERCÍCIOS DO CAPÍTULO 5

§1

1. Seja d uma pseudo-métrica num conjunto M. Prove que d é uma métrica se, e somente se, toda seqüência convergente segundo d possui um único limite.

2. Dada uma isometria $f\colon M \to M$, fixe um ponto $x_0 \in M$ e defina $x_1 = f(x_0), \ldots, x_{n+1} = f(x_n), \ldots$. Se $f(x_0) \neq x_0$, a seqüência (x_n) não converge.

3. Seja $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2$, onde $\mathbb{N}_1$ e $\mathbb{N}_2$ são infinitos. Dada uma seqüência (x_n) no espaço métrico M, se tivermos $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}_1} x_n = a$ e $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}_2} x_n = a$, para um certo $a \in M$, então $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n = a$. Generalizar para uma reunião finita $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \cup \cdots \cup \mathbb{N}_k$. Dar ainda exemplo de uma seqüência (x_n) uma decomposição infinita $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \cup \cdots \cup \mathbb{N}_k \cup \ldots$ onde cada $\mathbb{N}_k$ é infinito e $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}_k} x_n{=}a$ para cada $k \in \mathbb{N}$ porém a seqüência (x_n) não converge em M.

4. Dada uma função $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, diz-se que $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(n) = \infty$ quando, para todo $c > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow \varphi(n) > c$. Prove que $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(n) = \infty$ se, e somente se, para todo $k \in \mathbb{N}$ tem-se $\varphi^{-1}(k)$ finito. Em particular, se φ é injetiva tem-se $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(n) = \infty$. Dê exemplo de $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sobrejetiva que não goze dessa propriedade.

5. Sejam (x_n) uma seqüência no espaço métrico M e $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma função tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(n) = \infty$. Defina uma nova seqüência (y_n) em M pondo $y_n = x_{\varphi(n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Prove que $\lim x_n = a \Rightarrow \lim y_n = a$. A recíproca é verdadeira se φ, além disso, for sobrejetiva.

6. Se o espaço métrico M é discreto então o conjunto das seqüências convergentes é aberto em $\mathcal{B}(\mathbb{N}; M)$.

7. Um ponto $a \in M$ chama-se um *valor de aderência* da seqüência (x_n) em M quando a é limite de uma subseqüência de (x_n). Seja V o conjunto dos valores de aderência de (x_n) e, para cada $k \in \mathbb{N}$, seja F_k o fecho do conjunto $\{x_n; n \geq k\}$. Mostre que $V = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k$ e conclua que V é um subconjunto fechado de M (o qual pode ser vazio). Se (x_n) é limitada então V é limitado.

8. Seja (x_n) uma seqüência num espaço métrico M, com a seguinte propriedade: para todo subconjunto infinito $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$ tal que $\mathbb{N} - \mathbb{N}_1$ também é infinito, a restrição $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ é limitada. Prove que (x_n) é limitada.

9. Toda seqüência convergente possui um único valor de aderência. Discutir a validez da recíproca.

10. Dado um conjunto enumerável $E \subset M$, obtenha uma seqüência (x_n) da qual todo ponto $a \in E$ é valor de aderência.

11. Seja $C \subset \mathcal{B}(\mathbb{N}, M)$ o subespaço formado pelas seqüências convergentes no espaço métrico M. Mostre que a aplicação $\varphi\colon C \to M$, que associa a cada seqüência o seu limite, é contínua.

12. Dado um espaço métrico sem pontos isolados M, seja $D \subset \mathcal{B}(\mathbb{N}; M)$ o conjunto das seqüências limitadas divergentes em M. Prove que D é

denso em $\mathcal{B}(\mathbb{N}; M)$. Se $s \in D$ tem pelo menos um valor de aderência em M, então s é um ponto interior de M. Se $M = \mathbb{R}^n$, D é aberto. Mas uma seqüência de números racionais com limite irracional não é ponto interior a D em $\mathcal{B}(\mathbb{N}; \mathbb{Q})$.

13. Uma *seqüência dupla* num espaço métrico M é uma aplicação $(m, n) \mapsto x_{mn}$ de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ em M. A seqüência dupla (x_{mn}) origina, para cada $n \in \mathbb{N}$ fixo, a seqüência simples $(x_{1n}, x_{2n}, x_{3n}, \dots)$ e, para cada $m \in \mathbb{N}$ fixo, a seqüência $(x_{m1}, x_{m2}, x_{m3}, \dots)$. Escrevem-se $a_n = \lim\limits_{m\to\infty} x_{mn}$ e $b_m = \lim\limits_{n\to\infty} x_{mn}$ para indicar os limites destas seqüências simples, se existirem. Por outro lado, diz-se que a seqüência dupla (x_{mn}) *converge* para o limite $a \in M$ quando, para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_{mn}, a) < \varepsilon$. Escreve-se então $a = \lim\limits_{m,n} x_{mn} = \lim\limits_{m,n\to\infty} x_{mn}$. Seja $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida pondo-se $f(k) = k$ se k for par e $f(k) = 1/k$ se k for ímpar. Mostre que

   (1) A seqüência dupla de números reais $x_{mn} = [f(m) + f(n)]/mn$ converge para 0 mas não existem os limites simples $\lim\limits_{m\to\infty} x_{mn}$ e $\lim\limits_{n\to\infty} x_{mn}$ para valor algum de n ou de m.

   (2) Pondo-se $y_{mn} = f(n)/mn$, existe, para todo n, o limite $\lim\limits_{m\to\infty} y_{mn} = 0$ mas, para nenhum valor fixo de m, existe o limite $\lim\limits_{n\to\infty} y_{mn}$.

   (3) Se existir o limite duplo $a = \lim x_{mn}$ e, para todo n, existir $\lim\limits_{m\to\infty} x_{mn} = a_n$, então deve-se ter $\lim a_n = a$. Portanto, valem as igualdades

$$\lim_m(\lim_n x_{mn}) = \lim_n(\lim_m x_{mn}) = \lim_{m,n} x_{mn}$$

   desde que existam o limite duplo e os limites dentro dos parênteses.

   (4) Sejam (a_n) e (b_n) seqüências arbitrárias. Ponhamos $x_{mn} = a_n$ se $m \geq n$ e $x_{mn} = b_n$ se $m < n$. Tem-se $\lim\limits_m x_{mn} = b_n$. Escolhendo as seqüências (a_n) e (b_n) podemos fazer com que existam os limites repetidos mas sejam distintos. Neste caso, o limite duplo não existe.

   (5) Para a seqüência dupla $x_{mn} = mn/(m^2 + n^2)$, existem os limites repetidos e são iguais. Mas não existe o limite duplo.

§2

14. Seja $(r_1, r_2, \dots, r_n, \dots)$ uma enumeração arbitrária dos números racionais. Mostre que todo número real é valor de aderência da seqüência (r_n).

15. Dado $X \subset \mathbb{R}$ limitado, existem seqüências (x_n) e (y_n) em X tais que $\lim x_n = \inf X$ e $\lim y_n = \sup X$.

16. Seja (x_n) uma seqüência limitada de números reais. Para cada $n \in \mathbb{N}$, ponha $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$, $a_n = \inf X_n$ e $b_n = \sup X_n$. Prove que existem $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ e $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ e que esses números são valores de aderência de (x_n). Prove ainda que se c é qualquer valor de aderência de (x_n) tem-se $a \leq c \leq b$. Conclua que (x_n) é convergente se, e somente se, $a = b$, ou, equivalentemente, $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam}(X_n) = 0$. Escreve-se $a = \liminf x_n$ e $b = \limsup x_n$.

17. Sejam $f, g \colon \mathcal{B}(\mathbb{N};\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ as funções definidas por $f(x) = \liminf x_n$ e $g(x) = \limsup x_n$. Prove que f e g são contínuas. Conclua que o conjunto C das seqüências convergentes de números reais é fechado em $\mathcal{B}(\mathbb{N};\mathbb{R})$. Mostre que as seqüências convergentes de números racionais não constituem um subconjunto fechado de $\mathcal{B}(\mathbb{N};\mathbb{Q})$.

18. Toda seqüência limitada em $\mathbb{R}^n$ possui subseqüência convergente. Considerando $x_{mn} = 0$ se $m \neq n$ e $x_{nn} = 1$, mostre que o resultado análogo é falso em espaços normados de dimensão infinita, como $E = \mathcal{B}(\mathbb{N};\mathbb{R})$.

19. Seja $F \subset \mathbb{R}^n$ limitado e fechado. Toda função contínua $f \colon F \to \mathbb{R}$ é limitada. (*Sugestão*: supondo o contrário, obtenha uma seqüência de pontos $x_n \in F$ tais que $|f(x_n)| > n$ para todo n. Tome uma subseqüência convergente e veja qual é o valor de f no ponto limite.)

20. Seja $\mathcal{B}(\mathbb{N};\mathbb{R})$ o espaço das seqüências limitadas de números reais, com a métrica da convergência uniforme. Se, para cada $m \in \mathbb{N}$, $f_m \in \mathcal{B}(\mathbb{N};\mathbb{R})$ é uma seqüência convergente e $\lim f_m = f$ em $\mathcal{B}(\mathbb{N};\mathbb{R})$ então, pondo $x_{mn} = f_m(n)$, prove que a seqüência dupla (x_{mn}) converge e tem-se $\lim\limits_{m,n} x_{mn} = \lim\limits_{m\to\infty}(\lim\limits_{n\to\infty} x_{mn}) = \lim\limits_{n\to\infty}(\lim\limits_{m\to\infty} x_{mn})$. Em suma: dada uma seqüência dupla limitada (x_{mn}) de números reais, existem e são iguais os limites repetidos, desde que exista um dos limites simples dentro dos parênteses e que este limite seja uniforme em relação à outra variável.

21. Seja (c_n) uma seqüência de números reais, com $\lim c_n = 0$. Se $0 < \lambda < 1$ então, pondo $y_n = \lambda^n c_0 + \lambda^{n-1} c_1 + \dots + \lambda c_{n-1} + c_n$, tem-se ainda $\lim y_n = 0$.

§3

22. Prove que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$.

23. Dado um espaço vetorial normado E, sejam $Z \subset \mathcal{B}(\mathbb{N};E)$ o conjunto das seqüências x tais que $\lim x_n = 0$ e $S \subset \mathcal{B}(\mathbb{N};E)$ o conjunto das seqüências x para as quais a série $\Sigma\, x_n$ converge. S e Z são subespaços vetoriais de $\mathcal{B}(\mathbb{N};E)$, sendo Z fechado, mas S não é fechado. Mostre que S é denso em Z e que a aplicação $\sigma \colon S \to E$, definida por $\sigma(x) = \Sigma\, x_n$, é descontínua.

24. Dado um espaço vetorial normado E, seja $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}(\mathbb{N}; E)$ o conjunto das seqüências (x_n) tais que $\Sigma\, x_n$ é normalmente converge (isto é, $\Sigma|x_n| < +\infty$). Mostre que $\mathcal{C}$ é um subespaço vetorial e que $||x|| = \Sigma\, x_n$ define uma norma em $\mathcal{C}$, estritamente mais fina do que a norma $|x| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$.

§4

25. Seja $S \subset M$ denso. Dada uma sequência (x_n) em M, suponha que exista $x \in M$ tal que $\lim_{n\to\infty} d(x_n, s) = d(x, s)$ para todo $s \in S$. Prove que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.
26. Sejam d e d' métricas no mesmo espaço M. A fim de que d seja mais fina do que d' é necessário e suficiente que $\lim x_n = a$ segundo d implique $\lim x_n = a$ segundo d'. Mostre que uma condição suficiente é a seguinte: (x_n) convergente segundo d implica (x_n) convergente segundo d'. Concluir uma condição necessária e suficiente para equivalência de duas métricas em termos de limite de seqüências.
27. Uma função $f \colon M \to \mathbb{R}$ é semicontínua inferiormente no ponto $a \in M$ se, e somente se, para toda seqüência de pontos $x_n \in M$ com $\lim x_n = a$ tem-se $\liminf f(x_n) \geq f(a)$. (Aqui estamos admitindo que uma seqüência ilimitada inferiormente tem lim inf igual a $-\infty$.) Enuncie resultado análogo para lim sup.
28. Seja $f \colon M \to M$ uma aplicação contínua com a seguinte propriedade: para cada $\varepsilon > 0$ existe $x \in M$ tal que $d(x, f(x)) < \varepsilon$. Mostre, por meio de exemplo, que pode não existir um ponto fixo $a \in M$ (isto é, com $f(a) = a$). Prove que se $M = \mathbb{R}^n$ e se existe $c > 0$ tal que a condição $|x - f(x)| < \varepsilon$ pode sempre ser cumprida por meio de um ponto $x \in B(0; c)$, então f possui um ponto fixo.
29. Seja M um espaço métrico que possui um subconjunto enumerável denso. (Vide Exercício 78, Capítulo 3.) Dado qualquer subconjunto fechado não-vazio $F \subset M$, prove que existe uma seqüência (x_n) em M da qual F é conjunto dos valores de aderência.
30. Seja G um grupo metrizável (vide Exercício 18, Capítulo 3). Prove:
    (a) O fecho de um subgrupo $H \subset G$ é um subgrupo de G;
    (b) Todo subgrupo discreto de G é fechado.
31. Seja G um subgrupo do grupo aditivo dos números reais. Se 0 for um ponto isolado de G então, pondo $a = \inf\{x \in G; x > 0\}$ temos $a \in G$ e $G = a\mathbb{Z} = \{n \cdot a; n \in \mathbb{Z}\}$. Se 0 for ponto de acumulação de G então G é denso na reta. Assim um subgrupo aditivo de $\mathbb{R}$ ou é fechado ou denso em $\mathbb{R}$. Conclua também que se α é irracional, o conjunto dos números da forma $m + n \cdot \alpha, m, n \in \mathbb{Z}$, é denso em $\mathbb{R}$. Isto fornece dois subgrupos fechados $G, H \subset \mathbb{R}$ tais que $G + H$ não é fechado.

§5

32. A seqüência de funções $f_n(x) = 1/(1+nx)$ converge simplesmente porém não converge uniformemente no intervalo $[0,1]$. Idem para $f_n(x) = nx(1-x)^n$.

33. Seja $\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ o espaço vetorial das funções $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, com a norma $||f|| = \sup\limits_{a \leq x \leq b} (|f(x)| + |f'(x)|)$. Mostre que $\lim f_n = f$ em $\mathcal{C}^1([a,b];\mathbb{R})$ significa que $f_n \to f$ e $f'_n \to f'$ uniformemente em $[a,b]$.

34. Seja $r_1, r_2, \ldots, r_n \ldots$ uma enumeração dos racionais, com $r_n = p_n/q_n$ dado sob forma irredutível. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere uma função contínua $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que, nos intervalos onde não é zero, tem como gráfico n triângulos isósceles com vértices nos pontos $(r_1, 1/q_1), \ldots, (r_n, 1/q_n)$ e bases todas de comprimentos $< 1/n$, situadas no eixo das abcissas. Mostre que, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se $\lim f_n(x) = f(x)$ onde $f(x) = 0$ para x irracional e $f(x) = 1/q$ se $x = p/q$ é irredutível. Mostre ainda que em nenhum intervalo da reta tem-se $f_n \to f$ uniformemente.

35. Dada $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, diz-se que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = c$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $x > k \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon$. Mostre que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = c$ se, e somente se, a seqüência de funções $g_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por $g_n(x) = f(x+n)$, converge uniformemente para c em cada parte limitada de $(0,+\infty)$.

36. Seja E um espaço vetorial normado. As seguintes afirmações acerca de uma seqüência de transformações lineares $T_n\colon \mathbb{R}^m \to E$ e de uma $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; E)$ são equivalentes:

    (a) $\lim T_n \cdot x = T \cdot x$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$;

    (b) $\lim\limits_n T_n \cdot e_i = T \cdot e_i$ para todo $i = 1, \ldots, m$, onde $\{e_1, \ldots, e_m\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^m$;

    (c) $T_n \to T$ uniformemente em cada parte limitada de $\mathbb{R}^m$;

    (d) $T_n \to T$ no espaço $L(\mathbb{R}^m; E)$.

§6

37. Para $m, n \in \mathbb{N}$ arbitrários, ponha $x_{mn} = (1 - 1/n)^m$ e $x_m = (x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mn}, \ldots)$. Conclua, através deste exemplo, que o conjunto das seqüências convergentes não é fechado no espaço métrico produto $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots$

38. Dada uma seqüência de espaços métricos $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$ suponha que em cada um deles exista um subconjunto enumerável denso. Prove que o produto $M = \prod\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ possui um subconjunto enumerável denso.

39. Se $G_1, G_2, \dots, G_i, \dots$ são grupos metrizáveis, então o produto cartesiano $G = \prod_{i=1}^{\infty} G_i$, com as estruturas produto de espaço métrico e de grupo, é um grupo metrizável.

40. O produto cartesiano $\prod_{i=1}^{\infty} M_i$ é conexo se, e somente se, cada fator M_i é conexo.

41. O produto cartesiano $\prod_{i=1}^{\infty} M_i$ é localmente conexo se, e somente se, todos os fatores M_i são localmente conexos e, com exceção de um número finito deles, são também conexos.

42. Seja M um espaço métrico com mais de um ponto. Pondo $M = M_1 = M_2 = \cdots = M_n = \dots$, temos $\mathcal{B}(\mathbb{N}, M) = \prod_{i=1}^{\infty} M_i$ como conjuntos. Munindo o primeiro espaço com a métrica da convergência uniforme e o segundo com a métrica produto, mostre que a aplicação identidade $f\colon \mathcal{B}(\mathbb{N}; M) \to \prod M_i$ é contínua mas não é um homeomorfismo.

43. Seja $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ o espaço métrico cujos pontos são todas as funções contínuas $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e cuja métrica d é definida do seguinte modo. Para cada $i \in \mathbb{N}$, sejam $B_i \subset \mathbb{R}^n$ a bola fechada de centro na origem e raio i e, $M_i = \mathcal{C}_0(B_i; \mathbb{R})$ o espaço das funções contínuas (limitadas) de B_i em $\mathbb{R}$ com a métrica da convergência uniforme. Considere a aplicação injetiva $\varphi\colon \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}) \to \prod_{i=1}^{\infty} M_i$, dada por $\varphi(f) = (f|B_1, f|B_2, \dots, f|B_i, \dots)$, onde $f|B_i$ é a restrição de f à bola fechada B_i. A métrica de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ é definida de modo que φ seja uma imersão isométrica. Mostre que se tem $\lim f_n = f$ em $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ se, e somente se, $f_n \to f$ uniformemente em cada subconjunto limitado $L \subset \mathbb{R}^n$. Observe que $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ é um espaço vetorial cujas operações $(f, g) \to f + g$ e $(\alpha, f) \to \alpha \cdot f$ são contínuas mas sua métrica não provém de uma norma.

44. Mostre que a imersão isométrica $\varphi\colon \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}) \to \prod_{i=1}^{\infty} M_i$ (vide Exercício anterior) é uma aplicação fechada.

§7

45. Dada $f\colon A \to N$, se existir $\lim_{x \to a} f(x) = b$, tem-se $b \in \overline{f(A)}$.

46. Sejam E um espaço vetorial normado, a um ponto aderente a um conjunto X num espaço métrico M e $f, g\colon X \to \mathcal{L}(E; E)$ aplicações tais que f é limitada e $\lim_{x \to a} g(x) = 0$. Prove que $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = 0$.

47. Seja A um homeomorfismo linear do espaço vetorial normado E. Se $|A \cdot u| \geq c$ para todo $u \in E$ com $|u| = 1$ então $|A^{-1}| \leq 1/c$. Conclua que se $X \in \mathcal{L}(E; E)$ também é homeomorfismo e $|X - A| < c/2$ então $|X^{-1}| \leq 2/c$. Em seguida, use a identidade $X^{-1} - A^{-1} = X^{-1}(I -$

XA^{-1}) para concluir que $\lim_{X \to A} X^{-1} = A^{-1}$. Portanto, se $M \subset \mathcal{L}(E; E)$ indica o conjunto dos homeomorfismos lineares, a aplicação $f \colon M \to M$, definida por $f(X) = X^{-1}$, é contínua.

Capítulo 6

Continuidade Uniforme

Sejam M, N espaços métricos. Uma aplicação $f\colon M \to N$ diz-se *uniformemente contínua* quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que, sejam quais forem $x, y \in M$, $d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Evidentemente, toda aplicação uniformemente contínua é uma particular aplicação contínua, para a qual a escolha de δ a partir do ε dado é independente do ponto onde se analisa a continuidade. Ao contrário da simples continuidade, que é um fenômeno local, a continuidade uniforme é uma noção *global*, isto é, se relaciona com o comportamento da aplicação em todo o espaço simultaneamente. Pode muito bem ocorrer que cada ponto $a \in M$ seja centro de uma bola B tal que $f|B$ seja uniformemente contínua e, no entanto, a aplicação $f\colon M \to N$ não seja uniformemente contínua. Deve-se ainda levar em conta com cuidado que a noção de continuidade uniforme não é uma noção topológica. Mais precisamente: uma aplicação uniformente contínua $f\colon M \to N$ pode perder esta propriedade se substituirmos as métricas de M e (ou) de N por outras equivalentes. Dito de outro modo: a definição de aplicação contínua foi dada com ε e δ mas a continuidade pode ser caracterizada apenas com os conjuntos abertos. Em contraste, não é possível dar-se uma condição necessária e suficiente para a continuidade uniforme de $f\colon M \to N$ em termos dos abertos de M e N.

Uma bijeção $f\colon M \to N$ chama-se um *homeomorfismo uniforme* quando é uniformemente contínua e sua inversa $f^{-1}\colon N \to M$ também é. Não se deve confundir esta noção com a de um homeo-

morfismo uniformemente contínuo, que é uma bijeção uniformemente contínua $f\colon M \to N$, cuja inversa é (apenas) contínua. Veremos nos exemplos abaixo que as duas noções são diferentes.

Faremos a seguir uma série de observações que visam a esclarecer a idéia de continuidade uniforme. Os resultados mais importantes relativos a esse conceito são o teorema de extensão de aplicações uniformemente contínuas, que demonstraremos no Capítulo 7, e o teorema a ser provado no Capítulo 8, segundo o qual toda aplicação contínua com domínio compacto é uniformemente contínua.

1 Observações e exemplos:

ITEM 1. Se $f\colon M \to N$ e $g\colon N \to P$ são uniformemente contínuas, então a composta $g \circ f\colon M \to P$ também o é. A demonstração é imediata. Em particular, se $f\colon M \to N$ é uniformemente contínua e $X \subset M$ é um subespaço então $f|X\colon X \to N$ é uniformemente contínua. Basta notar que $f|X = f \circ i$, onde $i\colon X \to M$, dada por $i(x) = x$ para todo $x \in X$, é a aplicação de inclusão. A inversa de uma bijeção uniformemente contínua f pode não ter esta propriedade, mesmo quando f é um homeomorfismo. (Vide Item 11, a seguir.)

ITEM 2. Sejam M um espaço métrico e E um espaço vetorial normado. Se $f, g\colon M \to E$ são uniformemente contínuas, o mesmo ocorre com sua soma $f + g\colon M \to E$, como se vê facilmente. Por outro lado se $f, g\colon M \to \mathbb{R}$ são uniformemente contínuas, seu produto $f \cdot g\colon M \to \mathbb{R}$ pode não ser, a menos que f e g sejam limitadas. (Vide 4 e 16, adiante.)

ITEM 3. Toda aplicação lipschitziana $f\colon M \to N$ é uniformemente contínua. De fato, se $d(f(x), f(y)) \leq c{\cdot}d(x, y)$ para quaisquer $x, y \in M$, então, dado $\varepsilon > 0$, nós tomamos $\delta = \varepsilon/c$. De $d(x, y) < \delta$ segue-se $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y) < c \cdot \delta = \varepsilon$. Em particular, são uniformemente contínuas todas as funções $f\colon I \to \mathbb{R}$ com derivada limitada ($|f'(x)| \leq c$ para todo $x \in I$) num intervalo $I \subset \mathbb{R}$, como por exemplo $f\colon [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, onde $a > 0$ e $f(x) = \log x$. Neste caso, $0 \leq f'(x) = 1/x \leq 1/a$ para todo $x \in [a, +\infty)$. São ainda uniformemente contínuas: as aplicações constantes; as imersões

isométricas (em particular, as isometrias); as funções $d_A : M \to \mathbb{R}$, onde $A \subset M$ é um subconjunto não-vazio e $d_A(x) = d(x, A)$; as projeções $p_i : \prod_n M_n \to M_i$ de um produto cartesiano num dos seus fatores; a métrica $d : M \times M \to \mathbb{R}$; a norma $x \mapsto |x|$ de um espaço vetorial normado E, a adição $s : E \times E \to E$; toda aplicação linear contínua $f : E \to F$ (em particular, as aplicações lineares $f : \mathbb{R}^m \to F$). Um polinômio $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, restrito a um subconjunto limitado $X \subset \mathbb{R}$, dá uma função uniformemente contínua $p|X$. Uma aplicação n-linear contínua $f : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ (em particular, a multiplicação $m : \mathbb{R} \times E \to E$ e toda aplicação n-linear $f : \mathbb{R}^{m_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{m_n} \to F$), quando restrita a um subconjunto limitado $X \subset E_1 \times \cdots \times E_n$, é uniformemente contínua. (Vide Exemplos 1, 2, 3 e todo o §5 do Capítulo 2.)

ITEM 4. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, é uniformemente contínua em cada parte limitada de $\mathbb{R}$. Mas não é uniformemente contínua numa parte ilimitada $X \subset \mathbb{R}$. Com efeito, sendo $(x + 1/x)^2 - x^2 = 2 + 1/x^2 > 2$, podemos tomar $\varepsilon = 1$ e observar que, seja qual for $\delta > 0$ escolhido, existe sempre $x \in X$ com $|x| > 1/\delta$ e portanto $y = x + 1/x$ cumpre $|y - x| < \delta$, mas $|f(y) - f(x)| = (x + 1/x)^2 - x^2 > 2 > \varepsilon$. De modo análogo, para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se $\left(x + \frac{1}{x}\right)^n - x^n = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^{n-2i}$. Como todas as parcelas neste somatório têm o mesmo sinal e a primeira delas é $n \cdot x^{n-2}$, podemos escrever que $|x| > 1 \Rightarrow |(x + 1/x)^n - x^n| > n$. A partir daí concluímos, como no caso $n = 2$, que, para todo $n \in \mathbb{N}$, a função $f(x) = x^n$ é uniformemente contínua num subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ se, e somente se, X é limitado.

ITEM 5. Seja $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -1$ se $x < 0$ e $f(x) = 1$ se $x > 0$. (Equivalentemente: $f(x) = x/|x|$.) A função f é contínua (!) mas não é uniformemente contínua pois há pontos x, $-x$, tão próximos um do outro quanto se queira, com $|f(x) - f(-x)| = 2$.

ITEM 6. Generalizando o item anterior, seja $f : M \to N$ uma aplicação contínua. Se existem dois pontos distintos $a, b \in N$ tais que os subconjuntos $F = f^{-1}(a)$ e $G = f^{-1}(b)$, fechados em M e disjuntos, cumprem a condição $d(F, G) = 0$, então f não é uniformemente contínua. Com efeito, tomemos $\varepsilon = d(a, b)$. A condição

$d(F, G) = 0$ nos dá, para todo $\delta > 0$, pontos $x \in F$ e $y \in G$ tais que $d(x, y) < \delta$. Porém vale $d(f(x), f(y)) = d(a, b) = \varepsilon$. Um caso particular desta situação: $f : \mathbb{R}^2 - \{0\} \to S^1$, $f(z) = z/|z|$; para todo $a \in S^1$, $f^{-1}(a)$ é a semi-reta aberta de origem 0 que passa por a. Logo, para $a \neq b$ quaisquer em S^1, as imagens inversas $F = f^{-1}(a)$ e $G = f^{-1}(b)$ cumprem a condição $d(F, G) = 0$. Segue-se que f não é uniformemente contínua.

ITEM 7. Dados arbitrariamente os conjuntos fechados disjuntos F, G num espaço métrico M, podemos obter uma função contínua $f : M \to [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in F$ e $f(x) = 1$ para todo $x \in G$. (Uma tal f é o que se chama uma *função de Urysohn* do par F, G.) Podemos, por exemplo, tomar $f(x) = d(x, F)/[d(x, F) + d(x, G)]$, $x \in M$. [Como F e G são fechados, $d(x, F) = 0 \Rightarrow x \in F$ e $d(x, G) = 0 \Rightarrow x \in G$. Sendo F e G disjuntos, vemos que o denominador da expressão que define f é sempre > 0 e portanto f é contínua.] Quando os subconjuntos fechados $F, G \subset M$, além de disjuntos, são tais que $d(F, G) = 0$, então uma função de Urysohn do par (F, G) nunca é uniformemente contínua. Um exemplo deste caso é dado por $F = \{(x, 1/x) \in \mathbb{R}^2; x > 0\}$ = ramo positivo da hipérbole $y = 1/x$ e $G = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2; x > 0\}$ = semi-eixo positivo das abcissas.

ITEM 8. Para todo $a > 0$, a função contínua $f : (0, a] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \cos 1/x$, é contínua e limitada, mas não é uniformemente contínua. Com efeito, dado qualquer $\delta > 0$ podemos escolher $n \in \mathbb{N}$ tal que os pontos $y = 1/2n\pi$ e $x = 1/[(2n + 1)\pi]$ cumpram a condição $|y - x| = 1/[2n(2n + 1)\pi] < \delta$. No entanto, $|f(y) - f(x)| = 2$.

ITEM 9. Toda aplicação uniformemente contínua $f : I \to M$, definida num intervalo limitado $I \subset \mathbb{R}$, é limitada. Com efeito, tomando $\varepsilon = 1$, vemos que existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in I$, $|x - y| < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < 1$. Podemos decompor o intervalo I, por meio de (digamos n) pontos intermediários, em $n + 1$ subintervalos consecutivos, todos de comprimento menor do que δ. Dados arbitrariamente $x, y \in I$, seja k o número de pontos de subdivisão $a_1, a_2, \ldots, a_k$ compreendidos entre x e y. Tem-se $k \leq n$. Se for $k = 0$, então entre x e y não haverá pontos de subdivisão, logo

$|x - y| < \delta$ e portanto $|f(x) - f(y)| < 1$. Caso seja $k > 0$, temos

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &\le \\ &\le d(f(x), f(a_1)) + d(f(a_1), f(a_2)) + \cdots + \\ &+ d(f(a_k), f(y)) \le 1 + 1 + \cdots + 1 \le n + 1. \end{aligned}$$

Isto mostra que $f(I)$ é um conjunto com diâmetro $\le n+1$. Logo f é limitada. Como aplicação, vemos que a função $f\colon \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 1/x$, é contínua mas não é uniformemente contínua pois não é limitada, por exemplo, no intervalo $I = (0, 1]$.

ITEM 10. Seja $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo *limitado*. Toda função *monótona sobrejetiva* $f\colon X \to J$, definida num subconjunto qualquer $X \subset \mathbb{R}$, é uniformemente contínua. Se não supusermos J limitado, concluiremos apenas que f é contínua, devido à Proposição 7 do Capítulo 4. No caso presente, dado $\varepsilon > 0$, subdividamos o intervalo J, por meio de n pontos interiores $y_1 < y_2 < \cdots < y_n$, em $n + 1$ subintervalos de comprimento $< \varepsilon/2$. Para fixar idéias, seja f não-decrescente. Sendo f sobre J, existem pontos $x_1, \ldots, x_n$ em I tais que $f(x_1) = y_1, \ldots, f(x_n) = y_n$. A monotonicidade de f garante que $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Seja δ o menor dos números $x_{i+1} - x_i$. Se $x, y \in X$ são tais que $|x - y| < \delta$, então entre x e y existe no máximo um dos pontos x_i. Como f é monótona, segue-se que entre $f(x)$ e $f(y)$ existe no máximo um dos pontos $y_i = f(x_i)$. Logo $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

ITEM 11. Seja $f\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$. Mostraremos que f é uniformemente contínua e não é lipschitziana. Com efeito, se fixarmos $a > 0$, veremos que f transforma monotonicamente o intervalo $[0, a]$ sobre $[0, \sqrt{a}]$. Segue-se então do item anterior que f é uniformemente contínua no intervalo $[0, a]$. Por outro lado, dados $x \neq y$ quaisquer em $[0, +\infty)$, temos

$$\frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} = \frac{\sqrt{y} - \sqrt{x}}{y - x} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\,.$$

Como o quociente $1/(\sqrt{x} + \sqrt{y})$ não é limitado pra valores de x e y próximos de 0, concluímos que f não é lipschitziana em nenhum intervalo da forma $[0, a]$. Entretanto,

$$x \ge a \text{ e } y \ge a \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \le \frac{1}{2\sqrt{a}} \Rightarrow |f(y) - f(x)| \le c \cdot |x - y|,$$

com $c = 1/(2\sqrt{a})$. Logo f é lipschitziana, e portanto uniformemente contínua, no intervalo $[a, +\infty)$. Assim, f é uniformemente contínua em $[0, +\infty)$, porque o é em $[0, a]$ e em $[a, +\infty)$. Note-se que $f\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ é um homeomorfismo, cujo inverso, dado por $f^{-1}(y) = y^2$, não é uniformemente contínuo.

ITEM 12. Dado $n \in \mathbb{N}$, a identidade

$$v^n - u^n = (v - u)(v^{n-1} + uv^{n-2} + \cdots + u^{n-1})$$

nos permite escrever, para $x \neq y$ em $[0, +\infty)$ e $u = \sqrt[n]{x}$, $v = \sqrt[n]{y}$:

$$\frac{\sqrt[n]{y} - \sqrt[n]{x}}{y - x} = \frac{1}{v^{n-1} + uv^{n-2} + \cdots + u^{n-1}}\,.$$

A partir daí, deduzimos, como no item anterior, que $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ é um homeomorfismo uniformemente contínuo de $[0, +\infty)$ sobre si mesmo, que não é lipschitziano em nenhum intervalo contendo 0, e cujo inverso, $x \mapsto y^n$, não é uniformemente contínuo. Quando n é ímpar, podemos, se quisermos, usar toda a reta $\mathbb{R}$, em vez de $[0, +\infty)$ para as mesmas afirmações, que continuam válidas.

ITEM 13. Qualquer homeomorfismo de $\mathbb{R}$ sobre um intervalo limitado, como por exemplo $h\colon \mathbb{R} \to (-1, 1)$, $h(x) = x/(1 + |x|)$, é uniformemente contínuo, em virtude do Item 10 acima, mas o seu inverso $h^{-1}\colon (-1, +1) \to \mathbb{R}$ não pode ser uniformemente contínuo porque não é limitado (Item 9).

ITEM 14. Uma aplicação $f\colon M \to N_1 \times \cdots \times N_n$, tomando valores num produto cartesiano de n espaços métricos, é uniformemente contínua se, e somente se, cada uma de suas coordenadas $f_i = p_i \circ f\colon M \to N_i$ for uniformemente contínua. Como as projeções p_i são lipschitzianas, a parte "somente se" resulta imediatamente dos Itens 1 e 3. Para provar a parte "se", suponhamos que cada f_i seja uniformemente contínua e que nos é dado um número $\varepsilon > 0$. Existem $\delta_1 > 0, \ldots, \delta_n > 0$ tais que se $x, y \in M$,

$$d(x, y) < \delta_i \Rightarrow d(f_i(x), f_i(y)) < \frac{\varepsilon}{n} \ (i = 1, \ldots, n).$$

Tomemos em $N_1 \times \cdots \times N_n$ a métrica $d(w, z) = d(w_1, z_1) + \cdots + d(w_n, z_n)$. Seja δ o menor dos números $\delta_1, \ldots, \delta_n$. Então

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) = \sum_{i=1}^{n} d(f_i(x), f_i(y)) < \varepsilon.$$

Teríamos obtido o mesmo resultado se usássemos qualquer das outras duas métricas costumeiras no produto $N_1 \times \cdots \times N_n$. Isto é fácil de constatar diretamente e será provado logo mais.

ITEM 15. O resultado acima se estende para aplicação $f\colon M \to \prod_{i=1}^{\infty} N_i$, tomando valores no produto cartesiano de uma infinidade enumerável de espaços métricos. Tomamos em $N = \prod N_i$ a métrica

$$d(w,z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{d(w_i,z_i)}{1+d(w_i,z_i)} \cdot$$

Suponhamos que, para cada $i = 1, 2, \ldots$, a aplicação $f_i = p_i \circ f$ seja uniformemente contínua. Dado $\varepsilon > 0$, seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{i>n} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2} \cdot$ Para cada $i = 1, \ldots, n$ existe $\delta_i > 0$ tal que para $x, y \in M$,

$$d(x,y) < \delta_i \Rightarrow d(f_i(x), f_i(y)) < \frac{\varepsilon}{2n} \Rightarrow \frac{1}{2^i} \frac{d(f_i(x), f_i(y))}{1 + d(f_i(x), f_i(y))} < \frac{\varepsilon}{2n} \cdot$$

Logo, se chamarmos de δ o menor dos números $\delta_1, \ldots, \delta_n$, veremos que

$$d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) = \sum_{i \le n} + \sum_{i>n} < \varepsilon.$$

ITEM 16. Sejam $E_1, \ldots, E_n$, F espaços vetoriais normados, com $n \geq 2$. Uma aplicação n-linear $f\colon E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ é uniformemente contínua se, e somente se, é identicamente nula. Com efeito, se fosse $f \neq 0$, existiriam $u_1 \in E_1, \ldots, u_n \in E_n$ tais que $f(u_1, \ldots, u_n) = v \neq 0$. Substituindo, se necessário, u_1 por $u_1/|v|$, podemos admitir que $|f(u_1, \ldots, u_n)| = 1$. A aplicação $g\colon \mathbb{R} \to E_1 \times \cdots \times E_n$, dada por $g(t) = (t \cdot u_1, t \cdot u_2, u_3, \ldots, u_n)$, é afim, logo uniformemente contínua. Também é uniformemente contínua a função $F \to \mathbb{R}$, dada por $y \mapsto |y|$. Portanto, se f fosse uniformemente contínua, o mesmo ocorreria com a função composta $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$\varphi(t) = |f(g(t))| = |f(tu_1, tu_2, u_3, \ldots, u_n)| = t^2 \cdot |f(u_1, \ldots, u_n)| = t^2.$$

Mas sabemos que $t \mapsto t^2$ não é uniformemente contínua. Em particular, a multiplicação $m\colon \mathbb{R} \times E \to E$, $m(\lambda, x) = \lambda \cdot x$, não é uniformemente contínua salvo quando $E = \{0\}$.

ITEM 17. Se o espaço M tem a métrica zero-um, então toda aplicação $f\colon M \to N$ é uniformemente contínua.

ITEM 18. Seja $M = \{1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots\}$, com a métrica $d(x, y) = |x - y|$, induzida da reta. Então M é discreto, e portanto toda função $f\colon M \to \mathbb{R}$ é contínua. Mas se pusermos $f(1/n) = n$, a função $f\colon M \to \mathbb{R}$ assim definida não será uniformemente contínua. De fato, para qualquer $\delta > 0$ podemos encontrar $n \in N$ tal que $1/n < \delta$. Então os pontos $x = 1/n$ e $y = 1/(n+1)$ em M cumprem $|y - x| = 1/[n(n + 1)] < \delta$, porém $|f(y) - f(x)| = 1$. Mas a mesma função f é uniformemente contínua na métrica zero-um, que é equivalente em M à métrica $d(x, y) = |x - y|$. Este exemplo mostra que a continuidade uniforme não é uma noção topológica, isto é, não pode ser caracterizada através de conjuntos abertos.

Dadas as métricas d_1 e d_2 no mesmo conjunto M, escrevamos $M_1 = (M, d_1)$ e $M_2 = (M, d_2)$.

Diremos que as métricas d_1 e d_2 são *uniformemente equivalentes* quando a aplicação identidade $i_{12}\colon M_1 \to M_2$ for um homeomorfismo uniforme.

Se d_1 e d_2 são métricas uniformemente equivalentes em M, então as aplicações uniformemente contínuas definidas ou tomando valores em M são as mesmas, quer usemos a métrica d_1, quer d_2.

ITEM 19. Em qualquer espaço métrico M, as métricas

$$d_1(x, y) = d(x, y)\big/[1 + d(x, y)] \text{ e } d_2(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$$

são uniformemente equivalentes a d. (Vide Exemplo 23, Capítulo 2, onde se constata que a escolha de δ é feita em função do ε dada apenas, independentemente do ponto em questão.) Resulta portanto que toda métrica é uniformemente equivalente a uma métrica limitada.

ITEM 20. Sejam d_1 e d_2 métricas em M. Se existirem constantes $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ tais que $\alpha \cdot d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta \cdot d_1(x, y)$ para $x, y \in M$ quaisquer, então as métricas d_1 e d_2 serão uniformemente equivalentes. Com efeito, neste caso, as aplicações identidade $i_{12}\colon M_1 \to M_2$ e $i_{21}\colon M_2 \to M_1$ serão ambas lipschitzianas. O Item 19 mostra que estas desigualdades não constituem condição necessária para equivalência uniforme. (Vide Exemplo 23, Capítulo 2.)

ITEM 21. Num produto cartesiano $M = M_1 \times \cdots \times M_n$, as três métricas usuais

$$d'(x,y) = \sum_{i=1}^{n} d(x_i, y_i),$$

$$d''(x,y) = \max_{1 \leq i \leq n} d(x_i, y_i),\ d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d(x_i, y_i)^2}$$

são uniformemente equivalentes porque valem as desigualdades

$$d''(x,y) \leq d(x,y) \leq d'(x,y) \leq n \cdot d''(x,y)$$

para $x, y \in M$ quaisquer. Portanto, em fatos referentes à continuidade uniforme de aplicações definidas ou tomando valores em M, é indiferente qual das três métricas usamos. (Vide, por exemplo, o Item 14 acima.)

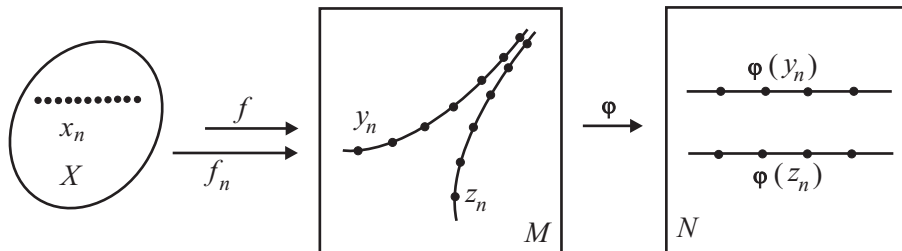
ITEM 22. Se duas métricas d_1 e d_2, num espaço vetorial E, provêm de normas em E, então elas são equivalentes se, e somente se, são uniformemente equivalentes. De fato, a aplicação identidade é linear. Logo, é contínua se, e somente se, é uniformemente contínua.

ITEM 23. Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos. A métrica d_1 em M, induzida por um homeomorfismo $h\colon M \to N$ é dada por $d_1(x,y) = d_N(h(x), h(y))$. Sabemos que d_1 é equivalente a d_M. A fim de que d_1 seja uniformemente equivalente a d_M, é necessário e suficiente que h sejam um homeomorfismo uniforme. Por exemplo, $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definido por $h(x) = x^3$ é um homeomorfismo que não é uniforme. Logo $d_1(x,y) = |x^3 - y^3|$ é uma métrica em $\mathbb{R}$, equivalente, porém não uniformemente, à métrica usual $d(x,y) = |x - y|$.

ITEM 24. Seja $f\colon (M,d) \to (N,d')$ uma aplicação contínua, mas não uniformemente contínua. A métrica d_f em M, definida por $d_f(x,y) = d(x,y) + d'(f(x), f(y))$, é equivalente a d (pois é induzida pelo homeomorfismo natural entre M e o gráfico de f) mas não é uniformemente equivalente a d. De fato, a aplicação $f\colon (M, d_f) \to (N, d')$ é uniformemente contínua, por ser uma contração fraca. Se d_f e d fossem uniformemente equivalentes, toda aplicação uniformemente contínua em relação a uma dessas métricas teria a mesma propriedade em relação à outra.

ITEM 25. A fim de que uma aplicação $f\colon M \to N$ seja uniformemente contínua, é necessário e suficiente que, para todo par de seqüências (x_n) e (y_n) em M, valha $\lim d(x_n, y_n) = 0 \Rightarrow \lim d(f(x_n), f(y_n)) = 0$.

ITEM 26. Seja $\varphi\colon M \to N$ uniformemente contínua. Se a seqüência de aplicações $f_n\colon X \to M$ converge uniformemente para $f\colon X \to M$, as aplicações $\varphi \circ f_n\colon X \to N$ convergem uniformemente para $\varphi \circ f\colon X \to N$. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $y, z \in M$ e $d(y, z) < \delta$, então $d(\varphi(y), \varphi(z)) < \varepsilon$. Por sua vez, dado $\delta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \delta$ para todo $x \in X$. Logo, $n > n_0 \Rightarrow d(\varphi f_n(x), \varphi f(x)) < \varepsilon$ para todo $x \in X$. Dessa forma, $\varphi f_n \to \varphi f$ uniformemente em X. Em conseqüência disto, se $\varphi\colon M \to N$ é um homeomorfismo uniforme, então $f_n\colon X \to M$ converge uniformemente para $f\colon X \to M$ se, e somente se, $\varphi \circ f_n\colon X \to N$ converge uniformemente para $\varphi \circ f\colon X \to N$. Em particular, se d_1 e d_2 são métricas uniformemente equivalentes em M, então uma seqüência de aplicações $f_n\colon X \to M$ converge uniformemente segundo a métrica d_1 se, e somente se, o faz segundo a métrica d_2.

ITEM 27. No item anterior, a hipótese de continuidade uniforme para φ é indispensável, salvo no caso trivial em que X é finito. (Neste caso, toda seqüência convergente de aplicações $f_n\colon X \to M$ é uniformemente convergente.) De fato, se X é infinito e $\varphi\colon M \to N$ não é uniformemente contínua (mesmo sendo contínua) então podemos obter uma seqüência de aplicações $f_n\colon X \to M$ que converge uniformemente para uma $f\colon X \to M$ sem que $\varphi f_n\colon X \to N$ convirja uniformemente para $\varphi f\colon X \to N$. Isto se faz assim: como φ não é uniformemente contínua, existem $\varepsilon > 0$ e duas seqüências de pontos $y_n, z_n \in M$ tais que $\lim\limits_{n\to\infty} d(y_n, z_n) = 0$ e $d(\varphi(y_n), \varphi(z_n)) \geq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sendo infinito, X possui um subconjunto enumerável $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Tomemos um aplicação $f\colon X \to M$ tal que $f(x_n) = y_n$. (Nos demais pontos de X, caso os haja, nada exigimos de f em especial.) Escolhida f, definamos, para cada $n \in \mathbb{N}$, uma aplicação $f_n\colon X \to M$ pondo$f_n(x) = f(x)$ para $x \neq x_n$ e $f_n(x_n) = z_n$. Então $f_n \to f$ uniformemente em X. Mas, como $d(\varphi f_n(x_n), \varphi f(x_n)) = d(\varphi(z_n), \varphi(y_n)) \geq \varepsilon$ par todo n, vemos que φf_n não converge uniformemente para φf em X.

Em particular, se d_1 e d_2 são métricas equivalentes, porém não uniformemente equivalentes num espaço M, dado qualquer conjunto infinito X, existe uma seqüência de aplicações $f_n\colon X \to M$ que converge uniformemente segundo uma dessas métricas mas não segundo a outra.

ITEM 28. Sejam d_1 e d_2 métricas limitadas equivalentes, porém não uniformemente equivalentes, ambas definidas entre os pontos do mesmo conjunto M. Escrevamos $M_1 = (M, d_1)$ e $M_2 = (M, d_2)$. Dado qualquer conjunto infinito X, sabemos que a aplicação identidade $\mathcal{B}(X; M_1) \to \mathcal{B}(X; M_2)$ não é um homeomorfismo. (Vide item anterior.) Daremos agora um exemplo de métricas limitadas d_1 e d_2 na reta $\mathbb{R}$, ambas equivalentes à métrica usual, tais que para qualquer conjunto infinito X, os espaços $\mathcal{B}(X; \mathbb{R}_1)$ e $\mathcal{B}(X; \mathbb{R}_2)$, onde $\mathbb{R}_1 = (\mathbb{R}, d_1)$ e $\mathbb{R}_2 = (\mathbb{R}, d_2)$, não são homeomorfos. (Ou seja, não apenas a aplicação identidade, mas *nenhuma* bijeção $\mathcal{B}(X; \mathbb{R}_1) \to \mathcal{B}(X; \mathbb{R}_2)$ é um homeomorfismo.)

A métrica d_1 é induzida pelo homeomorfismo $h\colon \mathbb{R} \to (-1, 1)$, onde $h(x) = x/(1 + |x|)$. Temos, então $d_1(x, y) = |h(x) - h(y)|$. Sabemos que d_1 é equivalente (mas não uniformemente!) à métrica usual da reta. Escrevendo $J = (-1, 1)$, vemos que $h\colon \mathbb{R}_1 \to J$ é uma isometria. Daí se deduz facilmente que $h_*\colon \mathcal{B}(X; \mathbb{R}_1) \to \mathcal{B}(X; J)$, definida por $h_*(f) = h \circ f$, é uma isometria. Ora, $\mathcal{B}(X; J)$ é um subconjunto convexo do espaço vetorial normado $\mathcal{B}(X; \mathbb{R})$. Em particular, $\mathcal{B}(X; J)$ é conexo. Segue-se então que $\mathcal{B}(X; \mathbb{R}_1)$ também é conexo.

A métrica d_2 será definida por $d_2(x, y) = \min\{1, |x - y|\}$. Então d_2 é uniformemente equivalente à métrica usual. Em particular, d_2 é equivalente a d_1. Seja $\mathbb{R}_2 = (\mathbb{R}, d_2)$. Mostraremos agora que $\mathcal{B}(X; \mathbb{R}_2)$ não é conexo. Para isto, escrevamos $\mathcal{F}(X; \mathbb{R}) = \bigcup_\alpha A_\alpha$, reunião disjunta, onde cada conjunto $A_\alpha = \mathcal{B}_\alpha(X; \mathbb{R})$ é constituído

pelas funções $f\colon X \to \mathbb{R}$ tais que $d(f,\alpha) = \sup_{x\in X} |f(x)-\alpha(x)| < +\infty$. (Vide §3 do Capítulo 1.) Como X é infinito, há pelo menos uma função $\alpha\colon X \to \mathbb{R}$ que não é limitada e portanto existem pelo menos dois conjuntos não-vazios A_α. (Além disso, os A_α são disjuntos uns dos outros.) Afirmamos que cada A_α é aberto no espaço métrico $\mathcal{B}(X;\mathbb{R}_2)$, o qual, como conjunto, coincide com $\mathcal{F}(X;\mathbb{R})$. Com efeito, se $f_n\colon X \to \mathbb{R}_2$ convergir uniformemente (segundo d_2!) para alguma função $f\colon X \to \mathbb{R}_2$ tal que $f \in A_\alpha$, então $f_n \to f$ uniformemente segundo a métrica usual da reta, pois esta é uniformemente equivalente a d_2. Então (Proposição 13, Capítulo 5), para todo n suficientemente grande, teremos $d(f, f_n) < +\infty$, donde $f_n \in A_\alpha$. Pela Proposição 11, Capítulo 5, concluímos que cada A_α é aberto no espaço métrico $\mathcal{B}(X;\mathbb{R}_2) = \bigcup_\alpha A_\alpha$, o qual é, portanto, desconexo.

Em particular, $\mathcal{B}(X;\mathbb{R}_1)$ e $\mathcal{B}(X;\mathbb{R}_2)$ não são homeomorfos, embora $\mathbb{R}_1$ e $\mathbb{R}_2$ o sejam.

EXERCÍCIOS DO CAPÍTULO 6

§1

1. Seja $X \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto limitado. Mostre que toda aplicação uniformemente contínua $f\colon X \to M$ é limitado. (*Sugestão*: mediante uma decomposição de $\mathbb{R}^m$ em cubos de aresta pequena, exprima X como reunião finita de conjuntos, em cada um dos quais a oscilação de f é menor do que 1.)

2. Prove ou dê um contra-exemplo: se $f\colon M \to N$ é uniformemente contínua então existe $\varepsilon > 0$ tal que toda função contínua $g\colon M \to N$ com $d(f(x), g(x)) < \varepsilon$ para qualquer $x \in M$ é uniformemente contínua.

3. Seja $\varphi\colon M \to N$ uma sobrejeção com a seguinte propriedade: existe $c > 0$ tal que para $x, y \in N$, $X = \varphi^{-1}(x)$ e $Y = \varphi^{-1}(y)$, tem-se $d(X,Y) \leq cd(x,y)$. Então, se $f\colon N \to P$ é tal que $f \circ \varphi\colon M \to P$ é uniformemente contínua, conclua que f é uniformemente contínua.

4. Se uma seqüência de aplicações uniformemente contínuas $f_n\colon M \to N$ converge uniformemente para uma aplicação $f\colon M \to N$ então f é uniformemente contínua.

5. Dada $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, suponha que exista $a > 0$ tal que $f|[0,a]$ e $f|[a,+\infty)$ sejam uniformemente contínuas. Prove que f é uniformemente contínua.

6. Seja $X \subset M$ denso. Se $f\colon M \to N$ é uma aplicação contínua tal que $f|X$ é uniformemente contínua, então f é uniformemente contínua.

7. Seja $\varphi\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ uma função crescente, contínua no ponto 0 e tal que $\varphi(0) = 0$. Diz-se que uma aplicação $f\colon M \to N$ admite φ como *módulo de continuidade* quando se tem $d(f(x), f(y)) \leq \varphi(d(x, y))$. Prove que uma aplicação limitada $f\colon M \to N$ é uniformemente contínua se, e somente se admite algum módulo de continuidade.

8. Seja $f\colon X \to \mathbb{R}$ uniformemente contínua e limitada no subconjunto $X \subset M$. Se $\varphi\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ é um módulo de continuidade para f, prove que existe $g\colon M \to \mathbb{R}$ uniformemente contínua, que ainda admite φ como módulo de continuidade, e tal que $g|X = f$. (*Sugestão*: defina $g(y) = \sup\limits_{x\in X}[f(x) - \varphi(d(x, y))]$, para todo $y \in M$.)

9. Sejam E, F espaços vetoriais normados, $M \subset E$ um subconjunto *convexo* e $f\colon M \to F$ uma aplicação uniformemente contínua. Prove que existe uma constante $a > 0$ tal que $|f(x)-f(y)| \leq a|x-y|+1$, quaisquer que sejam $x, y \in M$. Conclua que M limitado $\Rightarrow$ f limitada e que, se $0 \in M$, existem constantes $a, b > 0$ tais que $|f(x) \leq a \cdot |x| + b$ para todo $x \in M$.

10. Dada uma aplicação $f\colon (M, d) \to (N, d')$, seja d_f a métrica em M definida por $d_f(x, y) = d(x, y) + d'(f(x), f(y))$. Mostre que f é uniformemente contínua se, e somente se, d_f é uniformemente equivalente a d.

11. Um polinômio não-nulo $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função uniformemente contínua se, e somente se, tem grau ≤ 1.

12. Diremos que um grupo metrizável G cumpre a condição (L) quando existe uma constante $c > 0$ tal que $d(x \cdot u, y \cdot u) \leq c \cdot d(x, y)$ quaisquer que sejam $x, y, u \in G$. Exemplos: grupo aditivo de um espaço vetorial normado, um subgrupo limitado de $Gl(\mathbb{R}_n)$. Prove que se os grupos metrizáveis G, H cumprem a condição (L) então todo homomorfismo contínuo $f\colon G \to H$ é uniformemente contínuo.

13. Seja $\mathbb{R}^*$ o grupo multiplicativo dos números reais > 0 e $\mathbb{R}$ o grupo aditivo dos reais. Exiba um homomorfismo contínuo de $\mathbb{R}^*$ em $\mathbb{R}$ que não é uniformemente contínuo e conclua que a métrica natural de $\mathbb{R}^*$ não cumpre a condição (L).

14. Um caminho $f\colon [a, b] \to E$, num espaço vetorial normado E, chama-se *poligonal* quando existem $t_0 = a < t_1 < \cdots < t_n = b$ tais que $f|[t_i, t_{i+1}]$ é um caminho retilíneo, para $i = 0, \ldots, n-1$. O *comprimento* do caminho poligonal f é por definição, igual a $\ell(f) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|$. Dado um aberto conexo $U \subset E$ definimos a *métrica intrínseca* em U, pondo, para $x, y \in U$ quaisquer, $d_U(x, y) = \inf\limits_{f} \ell(f)$, onde f

percorre todos os caminhos poligonais em U, ligando x a y. Mostre que d_U é de fato uma métrica em U, equivalente a $d(x, y) = |y - x|$. Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ o complementar do intervalo $[-1, 1]$ do eixo das abcissas. Dados $x_n = (0, 1/n)$ e $y_n = (0, -1/n)$, calcule $d_U(x_n, y_n)$ e conclua que d_U não é uniformemente equivalente a d.

Capítulo 7

Espaços Métricos Completos

1 Seqüências de Cauchy

Uma seqüência (x_n) num espaço métrico M chama-se uma *seqüência de Cauchy* quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Toda subseqüência de uma seqüência de Cauchy é também de Cauchy.

A fim de que uma seqüência (x_n) seja de Cauchy, é necessário e suficiente que, para cada $\varepsilon > 0$ dado, exista $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$ qualquer que seja $p \in \mathbb{N}$. (Basta chamar de n o menor dos números m, n da definição anterior e por $m = n + p$.)

Intuitivamente, os termos de uma seqüência de Cauchy vão se tornando cada vez mais próximos uns dos outros, à medida que cresce o índice n. Compare com a definição de limite, na qual se exige que os termos da seqüência se tornem cada vez mais próximos de um ponto fixado.

Ser de Cauchy é uma propriedade intrínseca da seqüência; depende apenas dos seus termos, mas não da existência de outros pontos no espaço (em contraste com a propriedade de ser convergente). Assim, se $M \subset N$, uma seqüência de pontos $x_n \in M$ é de Cauchy em M se, e somente se, é de Cauchy em N.

Quando os termos de uma seqüência se aproximam de um ponto

fixado, eles devem necessariamente aproximar-se uns dos outros. Este é o conteúdo da

Proposição 1. *Toda seqüência convergente é de Cauchy.*

Demonstração. Se $\lim x_n = a$ no espaço métrico M então, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon/2$. Se tomarmos $m, n > n_0$ teremos

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, a) + d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Logo, (x_n) é de Cauchy.

Exemplo 1. Nem toda seqüência de Cauchy é convergente. Para ver isto, tomemos uma seqüência de números racionais x_n convergindo para um número irracional a. (Por exemplo, $x_1 = 1$, $x_2 = 1,4$, $x_3 = 1,41$, $x_4 = 414\ldots$, com $\lim x_n = \sqrt{2}$.) Sendo convergente em $\mathbb{R}$, segue-se da Proposição 1 que (x_n) é uma seqüência de Cauchy no espaço métrico $\mathbb{Q}$ dos números racionais. Mas evidentemente (x_n) não é convergente em $\mathbb{Q}$.

Proposição 2. *Toda seqüência de Cauchy é limitada.*

Demonstração. Seja (x_n) uma seqüência de Cauchy no espaço métrico M. Dado $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < 1$. Logo o conjunto $\{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \ldots\}$ é limitado e tem diâmetro ≤ 1. Segue-se que

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} = \{x_1, \ldots, x_{n_0}\} \cup \{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \ldots\}$$

é limitado.

Exemplo 2. Nem toda seqüência limitada é de Cauchy. O exemplo mais simples é dado por $(1, 0, 1, 0, \ldots)$ na reta. Embora limitada, esta seqüência não é de Cauchy pois $d(x_n, x_{n+1}) = 1$ para todo n.

Exemplo 3. A seqüência de números reais $x_n = 1 + 1/2 + \cdots + 1/n$ não é de Cauchy porque não é limitada. (Vide §3, Capítulo 5.)

Dada a seqüência (x_n) no espaço métrico M, escrevamos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$.

Temos $X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_n \supset \ldots$. Como $X_1 = \{x_1, \ldots, x_{n-1}\} \cup X_n$, um desses conjuntos é limitado se, e somente se, todos os demais o forem. Se tal é o caso, temos $\operatorname{diam}(X_1) \geq \operatorname{diam}(X_2) \geq$

... e portanto existe sempre $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(X_n)$. A fim de que (x_n) seja uma seqüência de Cauchy, é necessário e suficiente que seja $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(X_n) = 0$.

Proposição 3. *Uma seqüência de Cauchy que possui uma subseqüência convergente é convergente (e tem o mesmo limite que a subseqüência).*

Demonstração. Sejam (x_n) uma seqüência de Cauchy no espaço métrico M e (x_{n_k}) uma subseqüência que converge para o ponto $a \in M$. Afirmamos que $\lim x_n = a$. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n_k > p \Rightarrow d(x_{n_k}, a) < \varepsilon/2$. Existe também $q \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > q \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon/2$. Seja $n_0 = \max\{p, q\}$. Para todo $n > n_0$ existe $n_k > n_0$ e então

$$d(x_n, a) \le d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Logo $\lim x_n = a$.

A propriedade enunciada na Proposição 3 é evidentemente falsa para seqüências arbitrárias. Ela indica que uma seqüência de Cauchy só não converge num espaço M se "faltarem pontos no espaço".

Exemplo 4. Se uma seqüência possui duas subseqüências que convergem para limites distintos então ela não é de Cauchy. Em particular, uma seqüência que possui apenas um número finito de termos distintos só pode ser de Cauchy quando, a partir de uma certa ordem, ela se torna constante.

Proposição 4. *Toda aplicação uniformemente contínua transforma seqüências de Cauchy em seqüências de Cauchy.*

Demonstração. Sejam $f\colon M \to N$ uniformemente contínua e (x_n) uma seqüência de Cauchy em M. A fim de provar que a seqüência $(f(x_n))$ é de Cauchy, suponhamos dado $\varepsilon > 0$. Existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in M$, $d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Por sua vez, dado $\delta > 0$, existe $n_0 \in N$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \delta \Rightarrow d(f(x_m), f(x_n)) < \varepsilon$.

Corolário. *Seja $f\colon M \to N$ um homeomorfismo uniforme. Uma seqüência de pontos $x_n \in M$ é de Cauchy se, e somente se, $(f(x_n))$ é de Cauchy em N.*

Exemplo 5. Uma aplicação apenas contínua pode não transformar seqüências de Cauchy em seqüências de Cauchy. Tal é, por exemplo, o caso da função contínua $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$, que transforma a seqüência de Cauchy $(1/n)$ na seqüência $(f(1/n)) = (1, 2, 3, \dots)$, que não é de Cauchy. Ou da função contínua $g\colon (0,1) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \cos(1/x)$, que transforma a seqüência de Cauchy $(1/n\pi)$ na seqüência $(-1, 1, -1, 1, \dots)$, que não é de Cauchy. A Proposição 4 mostra que funções como estas não podem ser uniformemente contínuas. Isto nos diz também que a noção de seqüência de Cauchy não é topologicamente invariante. Ela se mantém apenas por homeomorfismos uniformes.

Exemplo 6. Não é válida a recíproca da Proposição 4. Transformar seqüências de Cauchy em seqüências de Cauchy é uma condição suficiente para que uma aplicação $f\colon M \to N$ seja contínua mas não garante que f seja uniformemente contínua. Para provar a primeira afirmação, suponhamos que f goze da propriedade mencionada e consideremos um ponto $a \in M$, Se $x_n \to a$ então a seqüência $(x_1, a, x_2, a, \dots)$ é de Cauchy em M e portanto $(f(x_1), f(a), f(x_2), f(a), \dots)$ também é de Cauchy em N. Segue-se da Proposição 3 que $\lim f(x_n) = f(a)$. Logo f é contínua em qualquer ponto $a \in M$. (Vide Proposição 9, Capítulo 5.) Por outro lado, a função contínua $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, não é uniformemente contínua, mas se (x_n) é uma seqüência de Cauchy, então existe $c > 0$ tal que $|x_n| \leq c$ para todo n. Como $f|[-c, c]$ é lipschitziana, segue-se da Proposição 4 que $(f(x_n))$ é de Cauchy.

Exemplo 7. Dada uma seqüência (x_n) num espaço métrico M, consideremos o espaço $P = \{1, 1/2, \dots, 1/n, \dots\}$, com a métrica induzida pela reta, e a aplicação $f\colon P \to M$, dada por $f(1/n) = x_n$. Afirmamos que (x_n) é uma seqüência de Cauchy se, e somente se, f é uniformemente contínua. Com efeito, se (x_n) é de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$. Seja $\delta = 1/(n_0 + 1)^2$. A menor distância não-nula de um ponto qualquer de P a um ponto do conjunto $\{1, 1/2, \dots, 1/n_0\}$ é

$$\frac{1}{n_0} - \frac{1}{n_0 + 1} = \frac{1}{n_0(n_0 + 1)} > \frac{1}{(n_0 + 1)^2} = \delta.$$

Logo

$$0 < \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| < \delta \Rightarrow m,\, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

e portanto f é uniformemente contínua. Reciprocamente, se $f\colon P \to M$ é uniformemente contínua, como a seqüência $(1/n)$ é de Cauchy em P (pois é convergente em $\mathbb{R}$), segue-se da Proposição 4 que $(x_n) = (f(1/n))$ é de Cauchy.

Exemplo 8. Uma seqüência de pontos $z_n = (x_n, y_n) \in M \times N$ é de Cauchy se, e somente se, as seqüências (x_n) em M e (y_n) em N são de Cauchy. Isto resulta do Exemplo 7 e do fato de que a aplicação $f\colon P \to M \times N$, dada por $f(1/n) = (x_n, y_n)$, é uniformemente contínua se, e somente se, suas coordenadas $p_1 \circ f\colon P \to M$ e $p_2 \circ f\colon P \to N$ o são. O mesmo resultado vale para o produto cartesiano $M_1 \times \cdots \times M_k$ de um número finito de fatores, ou mesmo para um produto cartesiano infinito $M = \prod\limits_{i=1}^{\infty} M_i$: uma seqüência de pontos $x_n \in \prod M_i$ é de Cauchy se, e somente se, para cada i, a seqüência $(p_i(x_n)) = (x_{ni})_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em M_i. (Vide itens 14 e 15 do Capítulo 6.)

2 Espaços métricos completos

Diz-se que o espaço métrico M é *completo* quando toda seqüência de Cauchy em M é convergente.

Exemplo 9. O espaço $\mathbb{Q}$ dos números racionais não é completo. (Vide Exemplo 1.) Todo espaço M com a métrica zero-um é completo, pois qualquer seqüência de Cauchy em M é constante a partir de um certo índice, e portanto convergente. Nem todo espaço métrico discreto, porém, é completo, como se vê tomando $P = \{1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots\}$, onde $x_n = 1/n$ fornece uma seqüência de Cauchy que não converge. Diremos que uma métrica d, num espaço M, é *uniformemente discreta* quando existir $\varepsilon > 0$ tal que $x, y \in M$, $d(x, y) < \varepsilon \Rightarrow x = y$. Neste caso, se (x_n) é uma seqüência de Cauchy em M, existe n_0 tal que $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon \Rightarrow x_m = x_n$. Assim, toda seqüência de Cauchy num espaço uniformemente discreto é constante a partir de um certo índice n_0, e portanto convergente. Tais espaços são, pois, completos.

Tomando-se $P = \{1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots\}$, primeiro com sua métrica usual e depois com a métrica zero-um, obtemos duas métricas equivalentes tais que P é completo em relação a uma delas porém não em relação à outra. Isto já mostra que um espaço métrico completo pode ser homeomorfo a um não-completo. Por outro lado, segue-se imediatamente da Proposição 4 que se $f\colon M \to N$ é um homeomorfismo uniforme, então M é completo se, e somente se, N o é. Em particular, toda métrica uniformemente equivalente a uma métrica completa é também completa.

A proposição seguinte, devida a Cauchy, estabelece o exemplo mais importante de espaço métrico completo.

Proposição 5. *A reta é um espaço métrico completo.*

Demonstração. Seja (x_n) uma seqüência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Pondo, para cada $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$, temos $X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_n \supset \ldots$ e os conjuntos X_n são limitados. Seja $a_n = \inf X_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Então $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b = \sup X_1$. Pela Proposição 7 do Capítulo 5, existe o número $a = \lim a_n$. Afirmamos que $a = \lim x_n$. Para provar isto, basta mostrar que a é limite de uma subseqüência de (x_n), ou seja, que dados arbitrariamente $\varepsilon > 0$ e $n_1 \in \mathbb{N}$, podemos obter $n > n_1$ tal que $x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. (Vide Proposição 3 acima e Proposição 4, Capítulo 5.) Ora, sendo $a = \lim a_n$, existe $m > n_1$ tal que $a - \varepsilon < a_m < a + \varepsilon$. Como $a_m = \inf X_m$, existe $n \geq m$ (e portanto $n > n_1$) tal que $a_m \leq x_n < a + \varepsilon$, isto é, $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Proposição 6. *Um subespaço fechado de um espaço métrico completo é completo. Reciprocamente, um subespaço completo de qualquer espaço métrico é fechado.*

Demonstração. Seja $F \subset M$ fechado, com M completo. Dada uma seqüência de Cauchy (x_n) em F, existe $\lim x_n = a \in M$. Como F é fechado em M, tem-se $a \in F$. Logo F é completo. Por outro lado, se $M \subset N$ é um subespaço completo, dada a seqüência de pontos $x_n \in M$, com $\lim x_n = a \in N$, a seqüência (x_n) é de Cauchy, pela Proposição 1. Logo existe $b \in M$ tal que $\lim x_n = b$. Pela unicidade do limite, tem-se $a = b$ e portanto M é fechado em N.

Na proposição seguinte, o produto cartesiano $M \times N$ é considerado com uma das três métricas usuais. Qual delas tomamos é

indiferente pois elas são uniformemente equivalentes.

Proposição 7. *O produto cartesiano $M \times N$ é completo se, e somente se, M e N são completos.*

Demonstração. Suponhamos M e N completos. Dada uma seqüência de Cauchy (z_n) em $M \times N$, seja $z_n = (x_n, y_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Com as projeções $p_1 \colon M \times N \to M$ e $p_2 = M \times N \to N$ são uniformemente contínuas, (x_n) e (y_n) são seqüências de Cauchy em M e N respectivamente. Logo existem $\lim x_n = a \in M$, $\lim y_n = b \in N$. Pondo $c = (a, b) \in M \times N$, temos $\lim z_n = c$. Assim, $M \times N$ é completo. Reciprocamente, se $M \times N$ é completo então, fixando $b \in N$, vemos que a aplicação $x \mapsto (x, b)$ é uma isometria de M sobre o subespaço fechado $M \times b \subset M \times N$. Segue-se da Proposição 6 que M é completo. De modo análogo se veria que N é completo.

Corolário 1. *$M_1 \times \cdots \times M_n$ é completo se, e somente se, $M_1, \ldots, M_n$ são completos.*

Aplicando $n-1$ vezes a proposição, concluímos sucessivamente que $M_1 \times M_2$, $M_1 \times M_2 \times M_3, \ldots, M_1 \times \cdots \times M_n$ são completos se cada um dos fatores M_i é completo. Reciprocamente, se o produto é completo, cada fator M_i é completo, por ser isométrico ao subespaço fechado $a_1 \times \cdots \times a_{i-1} \times M_i \times a_{i+1} \times \cdots \times a_n$ do produto.

Corolário 2. *O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é completo.*

Proposição 7^∞. *O produto cartesiano $M = \prod_{i=1}^{\infty} M_i$ é completo se, e somente se, cada um dos fatores $M_1, M_2, \ldots, M_i, \ldots$ é completo.*

Demonstração. A demonstração segue as mesmas linhas do caso finito: as projeções $p_i \colon M \to M_i$ são uniformemente contínuas, logo transformam seqüências de Cauchy em seqüências de Cauchy. Além disso, uma seqüência de pontos $x_n \in M$ converge se, e somente se, para cada $i \in \mathbb{N}$, a seqüência $(x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ni}, \ldots)$, com $x_{ni} = p_i(x_n)$, converge em M_i . Para a recíproca, observar que cada fator M_i é isométrico ao subespaço fechado M_i' obtido fixando-se um ponto $a \in M$ e pondo $M_i' = \{x \in M; x_j = a_j \text{ para todo } j \neq i\}$.

Sejam X um conjunto, M um espaço métrico e $\alpha \colon X \to M$ uma aplicação. A notação $\mathcal{B}_\alpha(X; M)$ representa o conjunto das

aplicações $f\colon X \to M$ tais que $d(f,\alpha) = \sup_{x\in X} d(f(x),\alpha(x)) < \infty$, com a métrica da convergência uniforme.

Proposição 8. *Se o espaço métrico M é completo então $\mathcal{B}_\alpha(X;M)$ é completo, sejam quais forem X e $\alpha\colon X \to M$.*

Demonstração. Seja (f_n) uma seqüência de Cauchy em $\mathcal{B}_\alpha(X;M)$. Esta seqüência é limitada; logo existe uma constante $c > 0$ tal que $d(f_n(x),\alpha(x)) \leq d(f_n,\alpha) \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in X$. Fixando-se arbitrariamente $x \in X$, a seqüência $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em M. Como M é completo, existe, para cada $x \in X$, o limite desta seqüência. Escreveremos $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \in M$. Isto define uma aplicação $f\colon X \to M$, que é o limite simples da seqüência (f_n). De $d(f_n(x),\alpha(x)) \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in X$, concluímos, fazendo $n \to \infty$, que $d(f(x),\alpha(x)) \leq c$ para todo $x \in X$. Logo $f \in \mathcal{B}_\alpha(X;M)$. Resta provar que $f_n \to f$ uniformemente em X. Ora, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m,n > n_0 \Rightarrow d(f_m(x),f_n(x)) < \varepsilon$ para qualquer $x \in X$. Fazendo $m \to \infty$ nesta desigualdade, concluímos que $n > n_0 \Rightarrow d(f(x), f_n(x)) \leq \varepsilon$ para todo $x \in X$. Ou seja, $f_n \to f$ uniformemente, como queríamos demonstrar.

Corolário 1. (*Critério de Cauchy para convergência uniforme.*) *Seja M um espaço métrico completo. A fim de que uma seqüência de aplicações $f_n\colon X \to M$ convirja uniformemente em X, é necessário e suficiente que, para todo $\varepsilon > 0$ dado, exista $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m,n > n_0$ implique $d(f_m(x),f_n(x)) < \varepsilon$ para todo $x \in X$.*

Se $f_n \to f$ uniformemente em X então $f_n \in \mathcal{B}_f(X;M)$ para todo n suficientemente grande e $\lim f_n = f$ nesse espaço. Logo (f_n) é uma seqüência de Cauchy em $\mathcal{B}_f(X;M)$ e a condição acima é necessária. Reciprocamente, supondo a condição satisfeita, tomamos $\varepsilon = 1$, a partir do qual obtemos n_0 como no enunciado e concluímos que, para $\alpha = f_{n_0+1}$, vale $d(f_n,\alpha) \leq 1$, ou seja $f_n \in \mathcal{B}_\alpha(X;M)$ se $n > n_0$. Além disso, a condição admitida diz que $(f_n)_{n>n_0}$ é uma seqüência de Cauchy no espaço métrico completo $B_\alpha(X;M)$. Segue-se que (f_n) converge uniformemente em X.

Corolário 2. *Sejam M, N espaços métricos. Se N é completo então, para toda aplicação $\alpha\colon M \to N$, o espaço métrico $\mathcal{C}_\alpha(M;N)$ é completo.*

$\mathcal{C}_\alpha(M;N)$ é o subespaço de $\mathcal{B}_\alpha(M;N)$ formado pelas aplicações contínuas $f\colon M \to N$ tais que $d(f,\alpha) < +\infty$. Sabemos que $\mathcal{C}_\alpha(M;N)$ é fechado no espaço completo $\mathcal{B}_\alpha(M;N)$. (Vide Exemplo 24, Capítulo 3.) Logo $\mathcal{C}_\alpha(M;N)$ é completo.

Em particular, o espaço $\mathcal{C}_0(M;R)$ das funções contínuas e limitadas $f\colon M \to \mathbb{R}$ é completo na métrica da convergência uniforme.

Corolário 3. *Sejam M e N espaços métricos, onde N é completo. Se uma seqüência de aplicações contínuas $f_n\colon M \to N$ converge uniformemente num subconjunto X então (f_n) converge uniformemente em $\overline{X}$.*

Começamos observando que se $\varphi\colon M \to \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que $\varphi(x) < \varepsilon$ para todo $x \in X$, então $\varphi(x) \le \varepsilon$ para todo $x \in \overline{X}$. Com efeito, o conjunto de todos os pontos $x \in M$ tais que $\varphi(x) \le \varepsilon$ é fechado em M e contém X, logo contém $\overline{X}$, o que vale dizer que $\varphi(x) \le \varepsilon$ para todo $x \in \overline{X}$.

Para demonstrar o corolário: dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m,n > n_0 \Rightarrow d(f_m(x), f_n(x)) < \varepsilon$ qualquer que seja $x \in X$. Fixando m, n e pondo $\varphi(x) = d(f_m(x), f_n(x))$, a observação anterior se aplica e concluímos que $m,n > n_0 \Rightarrow d(f_m(x), f_n(x)) \le \varepsilon$ para todo $x \in \overline{X}$. Segue-se do Corolário 1 que (f_n) converge uniformemente em $\overline{X}$.

Exemplo 10. Uma bola fechada $B[a;r]$ e sua fronteira, a esfera $S(a;r)$ no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ são espaços métricos completos, porque são subconjuntos fechados do espaço completo $\mathbb{R}^n$. Mais geralmente, se M é completo, as bolas fechadas e as esferas de M são espaços completos. Por outro lado, nenhuma bola aberta num espaço vetorial normado é um espaço completo, quando dotada da métrica induzida, pois não é um subconjunto fechado. Considerando uma bola aberta $B \subset \mathbb{R}^n$, vemos novamente um exemplo de dois espaços homeomorfos, B e $\mathbb{R}^n$, um dos quais é completo e o outro não.

3 Espaços de Banach e espaços de Hilbert

Exemplo 11. Dados os espaços vetoriais normados E e F, indicamos com a notação $\mathcal{L}(E;F)$ o conjunto das aplicações lineares contínuas de E em F. $\mathcal{L}(E;F)$ é um espaço vetorial, no qual consideramos a norma

$$||f|| = \sup\{|f(x)|; x \in E, |x| = 1\}.$$

Para toda $f \in \mathcal{L}(E;F)$, e todo $x \in E$, vale $|f(x)| \leq ||f|| \cdot |x|$. Seja $S = \{u \in E; |u| = 1\}$ a esfera unitária de E. Uma aplicação linear $f\colon E \to F$ é contínua se, e somente se, $f|S$ é limitada. Por definição, $\lim f_n = f$ em $\mathcal{L}(E;F)$ significa que $\lim ||f_n - f|| = 0$, o que equivale a dizer que $f_n \to f$ uniformemente em S.

Afirmamos que *se F é completo, então o espaço vetorial normado $\mathcal{L}(E;F)$ é completo.*

Com efeito, se (f_n) é uma seqüência de Cauchy em $\mathcal{L}(E;F)$ então as restrições $f_n|S$ constituem uma seqüência de Cauchy em $\mathcal{B}(S;F)$. Como F é completo, existe $f_0\colon S \to F$ limitada, tal que $f_n \to f_0$ uniformemente em S. Indiquemos com $f\colon E \to F$ a extensão da aplicação $f_0\colon S \to F$, definida por $f(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot f_0(u)$ se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in S$. Mostremos que $f_n \to f$ simplesmente em E: é claro que $f_n(0) = 0 \to 0 = f(0)$; se $x \neq 0$ então

$$\lim_n f_n(x) = |x| \cdot \lim_n f_n\left(\frac{x}{|x|}\right) = |x| \cdot f_0\left(\frac{x}{|x|}\right) = f(x).$$

Do fato de ser $\lim\limits_n f_n(x) = f(x)$ para todo $x \in E$, segue-se imediatamente que f é linear. Como $f|S = f_0$ é limitada, vemos que $f \in \mathcal{L}(E;F)$. E como $f_n|S \to f|S$ uniformemente, temos $\lim f_n = f$ no espaço $\mathcal{L}(E;F)$, que é portanto completo.

Exemplo 12. Um espaço vetorial normado completo chama-se um *espaço de Banach* $\mathbb{R}^n$ é um espaço de Banach. São também espaços de Banach $\mathcal{B}(X;F)$, $\mathcal{C}_0(M;F)$ e $\mathcal{L}(E;F)$, onde X é um conjunto qualquer, M um espaço métrico e F um espaço de Banach. Mostraremos no Capítulo 8 que todo espaço vetorial normado de dimensão finita é completo, isto é, um espaço de Banach. O conjunto

$\mathcal{P}[0,1]$ das funções polinomiais $p\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ é um espaço vetorial. Podemos considerar em $\mathcal{P}[0,1]$ a norma $||p|| = \sup_{t\in[0,1]} |p(t)|$, por exemplo. Em relação a esta norma, o espaço $\mathcal{P}[0,1]$ não é completo. Com efeito, sabe-se do Cálculo que a seqüência de polinômios

$$p_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

converge uniformemente em $[0,1]$ para a função contínua e^x, que não é um polinômio. Logo (p_n) é uma seqüência de Cauchy que não converge em $\mathcal{P}[0,1]$.

Exemplo 13. Uma série $\Sigma\, x_n$ num espaço vetorial normado E diz-se *normalmente convergente* quando $\Sigma|x_n| < +\infty$. (O que equivale a dizer que a série das normas $\Sigma|x_n|$ é convergente.) Se o espaço E é completo toda série normalmente convergente é convergente em E. Com efeito, seja $S_n = x_1 + \cdots + x_n$. Se $\Sigma|x_n| < +\infty$ então, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \cdots + |x_{n+p}| < \varepsilon,$$

seja qual for $p \in \mathbb{N}$. Segue-se então que, para os mesmos n_0, n e p tem-se

$$|S_{n+p} - S_n| = |x_{n+1} + \cdots + x_{n+p}| \leq |x_{n+1}| + \cdots + |x_{n+p}| < \varepsilon.$$

Logo a seqüência das somas parciais S_n é de Cauchy, e portanto convergente no espaço completo E. Em outros termos: a série $\Sigma\, x_n$ converge em E. Em particular, este resultado se aplica a séries de números reais, de números complexos, de vetores em $\mathbb{R}^n$ e de funções limitadas $f_n\colon X \to \mathbb{R}^k$. Neste último caso, obtemos o chamado "teste de Weierstrass": a condição $\Sigma||f_n|| < +\infty$ significa que existe uma série convergente Σc_n de constantes positivas tais que $|f_n(x)| \leq c_n$ para todo $x \in M$. (Basta tomar $c_n = ||f_n||$.) O teste de Weierstrass afirma que, nestas condições, a série $\Sigma\, f_n$ converge uniformemente em X. Quando o espaço E não é completo, uma série normalmente convergente de termos $x_n \in E$ pode não ser convergente. Por exemplo, no espaço $\mathcal{P}[0,1]$ a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ é normalmente convergente pois $\|\frac{x^n}{n!}\| \leq \frac{1}{n!}$ e $\sum \frac{1}{n!} = e$. Mas, como vimos acima, a série $\sum \frac{x^n}{n!}$ não converge para um polinômio.

Exemplo 14. Sejam E um espaço de Banach e $T\colon E \to E$ uma transformação linear contínua, com $||T|| < 1$. Consideremos a série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} T^n$ no espaço de Banach $\mathcal{L}(E;E)$. Para todo $n \geq 0$, temos $||T^n|| \leq ||T||^n$. Assim, a série de números reais não-negativos $\sum\limits_{n=0}^{\infty} ||T^n||$ é convergente, porque é majorada pela série geométrica $\Sigma ||T||^n$, cuja razão $||T||$ é menor do que 1. A série $\Sigma\, T^n$ é pois, normalmente convergente. Pelo exemplo anterior, concluímos que existe uma transformação linear contínua $S\colon E \to E$ tal que $S = I + T + T^2 + \cdots + T^n + \ldots$. Mostraremos que $S = (I - T)^{-1}$. Com efeito,

$$S \cdot (I - T) = \lim_{n\to\infty} (I + T + \cdots + T^n)(I - T) = \lim_{n\to\infty} (I - T^{n+1}) = I,$$

pois $||T^{n+1}|| \leq ||T||^{n+1} \to 0$. De modo análogo, se mostra que $(I - T) \cdot S = I$. Generalizando o Exemplo 9 do Capítulo 5, vemos que se E é um espaço de Banach e $T\colon E \to E$ é linear, com $||T|| < 1$ então $I - T$ possui uma inversa contínua $S\colon E \to E$ a qual é dada pela "série de Neumann" $(I - T)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} T^n$. [A "condição adicional" aludida no Exemplo 9a do Capítulo 5 era a completeza (sic) do espaço onde T opera.]

Exemplo 15. Um *espaço de Hilbert* é um espaço vetorial H, munido de um produto interno, e completo em relação à norma definida por esse produto interno. Por exemplo: o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, com o produto interno $\langle x, y \rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$.

Apresentaremos agora um exemplo importante de *espaço de Hilbert: o espaço das seqüências de quadrado somável*, ou *espaço* ℓ^2. Como conjunto, ℓ^2 é constituído por todas as seqüências $x = (x_1, \ldots, x_i, \ldots)$ de números reais tais que $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^2 < +\infty$.

Assim, por exemplo, se $x = (1, 1/2, 1/4, 1/8, \ldots)$, $y = (1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots)$, $z = (1, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{4}, \ldots)$, vemos que $x, y \in \ell^2$ pois $\Sigma\, 1/2^{2n} < \infty$ e $\Sigma\, 1/n^2 < \infty$ mas $z \notin \ell^2$ porque $\Sigma\, 1/n = \infty$. Também pertence a ℓ^2 toda seqüência $x = (x_1, \ldots, x_i, \ldots)$ tal que $x_i = 0$ para i suficientemente grande. Na notação do Exercício 46, Capítulo 1, isto significa que $\mathbb{R}^\infty \subset \ell^2$.

Dado $x \in \ell^2$, escreveremos $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2}$.

A fim de mostrar que ℓ^2 é um espaço vetorial relativamente às operações $x + y = (x_i + y_i)$ e $\lambda \cdot x = (\lambda \cdot x_i)$, observemos primeiro que se $x = (x_i)$ e $y = (y_i)$ pertencem a ℓ^2 então a série $\sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot y_i$ é convergente. Com efeito, a desigualdade de Cauchy-Schwarz nos dá, para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \cdot |y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2} \leq |x| \cdot |y|,$$

onde, conforme convencionamos acima, $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2}$ e $|y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2}$. As somas parciais da série $\Sigma |x_i \cdot y_i|$ são portanto majoradas pelo número real $|x| \cdot |y|$. Segue-se do Exemplo 13 que a série $\Sigma\, x_i \cdot y_i$ é convergente.

Agora mostraremos que ℓ^2 é um espaço vetorial. Se $x, y \in \ell^2$ então, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i\,.$$

Fazendo $n \to \infty$, vem

$$\Sigma (x_i + y_i)^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2\, \Sigma\, x_i \cdot y_i < +\infty,$$

logo $x + y \in \ell^2$. Se $x \in \ell^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ então é óbvio que $\lambda x \in \ell^2$. Isto conclui a verificação de que ℓ^2 é um espaço vetorial. Pondo $\langle x, y \rangle = \Sigma\, x_i \cdot y_i$, introduzimos um produto interno em ℓ^2, cuja norma subjacente é $|x| = \sqrt{\Sigma\, x_i^2}$.

Resta apenas mostrar que ℓ^2 é completo em relação à métrica $|x - y| = \sqrt{\Sigma (x_i - y_i)^2}$. Seja então (x_n) uma seqüência de Cauchy em ℓ^2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, ponhamos $x_n = (x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{ni}, \ldots)$. Fixado qualquer $i \in \mathbb{N}$, temos $|x_{mi} - x_{ni}| \leq |x_m - x_n|$, logo $(x_{ni})_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy de números reais. Segue-se que, para cada $i \in \mathbb{N}$, existe o número real $a_i = \lim_{n \to \infty} x_{ni}$. Seja $a = (a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots)$. Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n >$

$n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon$. Logo, para todo $k \in \mathbb{N}$ e $m, n > n_0$ temos

$$\sum_{i=1}^{k} (x_{mi} - x_{ni})^2 < \varepsilon^2.$$

Mantendo fixos k e n e fazendo $m \to \infty$ na desigualdade acima, concluímos que, para todo $k \in \mathbb{N}$ vale

$$\sum_{i=1}^{k} (a_i - x_{ni})^2 \leq \varepsilon^2, \text{ para todo } n > n_0\,.$$

Fazendo agora $k \to \infty$, resulta $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (a_i - x_{ni})^2 \leq \varepsilon^2$ para todo $n > n_0$. Em particular, $n > n_0 \Rightarrow a - x_n \in \ell^2$. Segue-se que $a = (a - x_n) + x_n$ pertence a ℓ^2, pois x_n pertence ao espaço vetorial ℓ^2. A última desigualdade pode então ser escrita: $n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| \leq \varepsilon$, ou seja $a = \lim x_n$ em ℓ^2. Assim, toda seqüência de Cauchy em ℓ^2 é convergente e portanto ℓ^2 é um espaço de Hilbert.

O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é o conjunto das listas finitas $x = (x_1, \ldots, x_n)$ onde cada coordenada x_i é um número real. Em $\mathbb{R}^n$ as métricas $d'(x, y) = \sum\limits_i |x_i - y_i|$, $d''(x, y) = \max\limits_i |x_i - y_i|$ e $d(x, y) = \sqrt{\Sigma(x_i - y_i)^2}$ são (uniformemente) equivalentes. Examinemos agora o que acontece quando $n = \infty$.

O conjunto de todas as seqüências $x = (x_1, \ldots, x_i, \ldots)$ de números reais é o produto cartesiano $\prod\limits_{i=1}^{\infty} \mathbb{R}_i$, onde $\mathbb{R}_i = \mathbb{R}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. É conveniente usar a notação mais simples $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ a fim de indicar este espaço, no qual foi definida a *métrica produto*

$$d'(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|}\,.$$

Esta é a generalização natural da métrica $d'(x, y) = \Sigma|x_i - y_i|$. As modificações introduzidas tiveram apenas a finalidade de fazer a série convergir.

Cada ponto $x = (x_i) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ é uma função $x \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e a convergência de uma seqüência de pontos em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ é a convergência simples, isto é, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ se, e somente se, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{ni} = a_i$ para

cada $i \in \mathbb{N}$. Equivalentemente, uma aplicação $f: M \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, definida num espaço métrico arbitrário, com valores em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, é contínua se, e somente se, para cada $i \in \mathbb{N}$, sua i-ésima coordenada $f_i = p_i \circ f : M \to \mathbb{R}$ é contínua. Aqui, $p_i : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ é a projeção $p_i(x) = x_i$. Estes fatos concordam com o que tinha sido estabelecido antes para $\mathbb{R}^n$.

No subconjunto $\mathcal{B}(\mathbb{N}; \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, formado pelas seqüências limitadas de números reais, foi também considerada a métrica da *convergência uniforme* $d''(x,y) = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i - y_i|$.

A métrica da convergência uniforme é mais fina do que a métrica da convergência simples, induzida por $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ no subconjunto $\mathcal{B}(\mathbb{N}; \mathbb{R})$. Com efeito, $|x_i - y_i| \leq d''(x,y)$. Logo $x_n \to a$ (uniformemente) em $\mathcal{B}(\mathbb{N}; \mathbb{R}) \Rightarrow x_{ni} \to a_i$ para todo $i \Rightarrow \lim x_n = a$ em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Mas se tomarmos, por exemplo $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$, veremos que $e_n \to (0, 0, \dots)$ simplesmente, enquanto que $e_n \not\to 0$ uniformemente, pois $||e_n|| = \sup_{i \in \mathbb{N}} |e_{ni}| = 1$. A métrica da convergência uniforme generaliza a métrica $d''(x,y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$ de $\mathbb{R}^n$.

Finalmente, temos $\ell^2 \subset \mathcal{B}(\mathbb{N}; \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, onde ℓ^2 é o conjunto das seqüências $x = (x_1, \dots, x_i, \dots)$ tais que $\Sigma x_i^2 < +\infty$. Em ℓ^2, a métrica é $d''(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2}$. A métrica ℓ^2 é estritamente mais fina do que as métricas uniforme e produto. Em outras palavras, se (x_n) é uma seqüência de pontos em ℓ^2 e $a \in \ell^2$, então:

$$\boxed{\begin{array}{l}\lim x_n = a \\ \text{na métrica de } \ell^2\end{array}} \overset{(1)}{\Rightarrow} \boxed{\begin{array}{l}x_n \to a \\ \text{uniformemente}\end{array}} \overset{(2)}{\Rightarrow} \boxed{\begin{array}{l}\lim_{n\to\infty} x_{ni} = a_i \\ \text{para cada } i \in \mathbb{N}\end{array}}$$

mas as implicações contrárias são ambas falsas.

Para provar a implicação (1), basta notar que $|x_n - a| < \varepsilon$ em $\ell^2 \Rightarrow |x_{ni} - a_i| < \varepsilon$ para todo $i \Rightarrow \sup_i |x_{ni} - a_i| \leq \varepsilon \Rightarrow ||x_n - a|| \leq \varepsilon$ em $\mathcal{B}(\mathbb{N}; \mathbb{R})$.

A implicação (2) foi provada acima.

Como contra-exemplo para a recíproca de (2), podemos tomar $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$. Então $\lim_{n \to \infty} e_{ni} = 0$ para cada $i \in \mathbb{N}$ mas

$$||e_m - e_n|| = \sup_i |e_{mi} - e_{ni}| = 1,$$

logo (e_n) não é uma seqüência de Cauchy em $\mathcal{B}(\mathbb{N};\mathbb{R})$ e portanto não converge uniformemente para limite algum.

Também a recíproca de (1) é falsa, como se vê tomando

$$x_n = \big(1/\sqrt{n}, 1/\sqrt{n}, \dots, 1/\sqrt{n}, 0, 0, \dots\big),$$

onde as primeiras n coordenadas são iguais a $1/\sqrt{n}$ e as restantes são 0. Então $x_n \to 0$ uniformemente, pois $||x_n|| = 1/\sqrt{n}$, mas $|x_n| = 1$ em ℓ^2 logo não se tem $\lim x_n = 0$ em ℓ^2. Na realidade, como $|x_{4n} - x_n| = 1$ em ℓ^2, a seqüência (x_n) não é de Cauchy e portanto não converge para limite algum em ℓ^2.

A métrica de ℓ^2 é a generalização natural da métrica euclidiana

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

de $\mathbb{R}^n$, inclusive porque provém de um produto interno.

Os três espaços ℓ^2, $\mathcal{B}(\mathbb{N};\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ são espaços métricos completos. O primeiro é um espaço de Hilbert, o segundo é um espaço de Banach e o terceiro, embora seja um espaço vetorial, sua métrica não provém de uma norma, pois não cumpre a condição $d'(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \cdot d'(x,y)$. Entretanto, como se vê facilmente, as operações $s\colon \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ e $m\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, definidas por $s(x,y) = x + y$ em $m(\lambda, x) = \lambda \cdot x$, são contínuas. Por isso se diz que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ é um *espaço vetorial topológico.* (O fato de ser métrico, completo e admitir uma base de abertos convexos, classifica $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ como *espaço de Fréchet.*)

4 Extensão de aplicações contínuas

Dados $X \subset Y$, uma aplicação $F\colon Y \to Z$ chama-se uma *extensão* de $f\colon X \to Z$ quando $F(x) = f(x)$ para todo $x \in X$, ou seja, quando $F|X = f$. Sejam agora M, N espaços métricos, $X \subset M$ e $f\colon X \to N$ uma aplicação contínua. Diremos que f *se estende continuamente* a M quando f possui uma extensão $F\colon M \to N$ contínua. Nem toda aplicação contínua $f\colon X \to N$ pode ser continuamente estendida ao espaço inteiro M. Por exemplo, a função contínua $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x(x-1)$, não possui extensão

contínua a nenhum conjunto contendo o intervalo fechado $[0,1]$, pois não existem os limites $\lim_{x\to 0} f(x)$ e $\lim_{x\to 1} f(x)$.

Abordaremos aqui o problema de estender continuamente a todo o espaço M uma aplicação contínua $f\colon X \to N$, definida num subconjunto denso $X \subset M$. Isto equivale a, dada uma aplicação contínua $f\colon X \to N$, definida num subconjunto qualquer $X \subset M$, estendê-la continuamente a um conjunto S tal que $X \subset S \subset \overline{X}$. O problema geral de extensão de aplicações contínuas é estudado na Topologia Algébrica, que trata de métodos especiais para resolvê-lo em casos particulares (Teoria da Obstrução).

No caso que temos em vista, a resposta é imediata: uma aplicação contínua $f\colon X \to N$, definida num subconjunto denso $X \subset M$, pode ser estendida continuamente a M se, e somente se, existe, para cada $a \in M$, o limite $\lim_{x\to a} f(x)$.

Com efeito, em primeiro lugar, como $\overline{X} = M$, tem sentido considerar o limite $\lim_{x\to a} f(x)$ para todo $a \in M$. Em seguida, se existe $F\colon M \to N$ contínua estendendo f então vale $\lim_{x\to a} F(x) = F(a)$ para todo $a \in M$. Em particular, $\lim_{x\to a} f(x) = F(a)$. Reciprocamente, se existe o limite $\lim_{x\to a} f(x)$ para todo $a \in M$ então a aplicação $F\colon M \to N$, cujo valor em cada ponto $a \in M$ é definido como sendo este limite, é contínua, em virtude da Proposição 20, Capítulo 5.

A extensão contínua $F\colon M \to N$ de uma aplicação contínua $f\colon X \to N$, definida num subconjunto denso $X \subset M$, se existir, é única. Com efeito, para todo $a \in M$, o valor $F(a) = \lim_{x\to a} f(x)$, é determinado univocamente pelos valores que f assume em X. (Podíamos também ter apelado para o Exemplo 13 do Capítulo 5.)

Não há nada mais de útil a acrescentar sobre nosso problema, em geral. Vamos agora supor que N seja completo, a fim de obter novas informações. Em primeiro lugar, temos a

Proposição 9. (*Critério de Cauchy*). *Seja $f\colon X \to N$ uma aplicação definida no subconjunto X do espaço métrico M e tomando valores no espaço métrico completo N. Dado $a \in \overline{X}$, a fim de que exista $\lim_{x\to a} f(x)$, é necessário e suficiente que, para todo $\varepsilon > 0$, se possa obter $\delta > 0$ tal que $x, y \in X$, $d(x,a) < \delta$, $d(y,a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.*

Demonstração. Se $\lim_{x\to a} f(x) = b \in N$ existe, então, dado $\varepsilon > 0$, podemos obter $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $d(x,a) < \delta \Rightarrow d(f(x),b) < \varepsilon/2$. Portanto, se $x, y \in X$ cumprem $d(x,a) < \delta$ e $d(y,a) < \delta$, temos $d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), b) + d(f(y), b) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Reciprocamente, se esta condição é satisfeita então, para toda seqüência de pontos $x_n \in X$ com $\lim x_n = a$, a seqüência $(f(x_n))$ é de Cauchy, e portanto convergente em N. Segue-se pois do Corolário da Proposição 19, Capítulo 5, que existe $\lim_{x\to a} f(x)$.

A condição do critério de Cauchy pode também ser enunciada assim: "para todo $\varepsilon > 0$, existe uma bola B, de centro a, em M, tal que $\operatorname{diam}[f(B \cap X)] < \varepsilon$."

Como corolário do critério de Cauchy, obtemos o teorema de extensão de aplicações uniformemente contínuas:

Proposição 10. *Toda aplicação uniformemente contínua $f\colon X \to N$, definida num subconjunto denso de um espaço métrico M e tomando valores num espaço métrico completo N, possui uma única extensão contínua $F\colon M \to N$. A aplicação F também é uniformemente contínua.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x, y \in X,\ d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Segue-se que, para todo $a \in M$, se $x, y \in X$ e $d(x,a) < \delta/2$, $d(y,a) < \delta/2$ então $d(x,y) < \delta$ e portanto $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Pelo critério de Cauchy, existe $\lim_{x\to a} f(x) = F(a)$, para todo $a \in M$. A extensão $F\colon M \to N$, assim obtida, é contínua em virtude da Proposição 20, Capítulo 5. Mostraremos diretamente que ela é uniformemente contínua. Seja, pois, dado $\varepsilon > 0$. A continuidade uniforme de f nos fornece $\delta > 0$ tal que

$$x, y \in X,\ d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon/2.$$

Afirmamos que este δ atende ao ε dado para a continuidade uniforme de F. Com efeito, sejam $u, v \in M$ e $d(u,v) < \delta$. Então $u = \lim x_n$ e $v = \lim y_n$, onde $x_n, y_n \in X$. Pela continuidade da função distância, vale $d(x_n, y_n) < \delta$, para todo n suficientemente grande. Segue-se que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon/2$ para $n > n_0$. Assim $u, v \in M$, $d(u,v) < \delta \Rightarrow d(F(u), F(v)) = d(\lim f(x_n),$

$\lim f(y_n)) = \lim d(f(x_n), f(y_n)) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$. Isto é o que queríamos demonstrar.

Corolário 1. *Seja* $f\colon X \to Y$ *um homeomorfismo uniforme entre subespaços densos* $X \subset M$ *e* $Y \subset N$. *Se* M *e* N *são completos,* f *se estende, de modo único, a um homeomorfismo uniforme* $F\colon M \to N$.

Com efeito, seja $g\colon Y \to X$ o inverso de f. Existem aplicações uniformemente contínuas $F\colon M \to N$ e $G\colon N \to M$ que estendem f e g respectivamente. As aplicações contínuas $G \circ F\colon M \to M$ e $F \circ G\colon N \to N$ são tais que $(G \circ F)(x) = x$ para todo $x \in X$ e $(F \circ G)(y) = y$ para todo $y \in Y$. Como $X \subset M$ e $Y \subset N$ são densos, segue-se que $G \circ F = id_M$ e $F \circ G = id_N$. Logo, $G = F^{-1}$ e, por conseguinte, F é um homeomorfismo uniforme de M sobre N.

Corolário 2. *Seja* $f\colon X \to Y$ *uma isometria entre subespaços densos* $X \subset M$ *e* $Y \subset N$. *Se* M *e* N *são completos,* f *se estende, de modo único, a uma isometria* $F\colon M \to N$.

Existe um único homeomorfismo uniforme $F\colon M \to N$, que estende f. Dados $x, y \in M$, temos $x = \lim x_n$, $y = \lim y_n$, com $x_n, y_n \in X$ para todo n. Logo

$$d(F(x), F(y)) = d(\lim f(x_n), \lim f(y_n)) = \\ = \lim d(f(x_n), f(y_n)) = \lim d(x_n, y_n) = d(x, y).$$

Assim, F é uma isometria.

Exemplo 16. A Proposição 10 não continua válida quando se omite a hipótese de N ser completo. Por exemplo, a aplicação identidade $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, embora uniformemente contínua, não possui uma extensão contínua $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$, pois toda função contínua de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{Q}$ é constante. ($\mathbb{R}$ conexo $\Rightarrow$ $F(\mathbb{R})$ conexo mas nenhum subconjunto conexo de $\mathbb{Q}$ tem mais de um ponto.)

A Proposição 10 pode também ser enunciada do modo seguinte, aparentemente mais geral: "Seja $f\colon X \to N$ uniformemente contínua no subconjunto $X \subset M$ (que não supomos denso). Se N é completo, existe uma única aplicação contínua $F\colon \overline{X} \to N$ que estende f. A aplicação F é uniformemente contínua". Um aperfeiçoamento imediato da Proposição 10 consiste em observar que a

existência da extensão de uma aplicação contínua é um fenômeno "limitado". Para que $f\colon X \to N$ (N completo) se estenda a uma aplicação contínua $F\colon M \to N$, basta que f transforme seqüências de Cauchy em X em seqüências de Cauchy em N. Para que isto aconteça é suficiente que $f\colon X \to N$ *seja uniformemente contínua em cada parte limitada de* X.

Podemos então enunciar a

Proposição 10a. *Seja* $f\colon X \to N$ *uniformemente contínua em cada parte limitada do subespaço* $X \subset M$ *e tomando valores no espaço métrico completo* N. *A aplicação* f *possui uma única extensão contínua* $F\colon \overline{X} \to N$, *a qual também é uniformemente contínua em cada parte limitada de* $\overline{X}$.

Se $f\colon X \to N$ não é uniformemente contínua, sua extensão contínua F pode não existir, caso continuemos exigindo que seu domínio seja todo o fecho de X. Mas certamente, se considerarmos

$$D = \{a \in \overline{X};\ \text{existe } \lim_{x\to a} f(x)\},$$

então f se estende a uma aplicação contínua $F\colon D \to N$, definida por $F(a) = \lim_{x\to a} f(x)$. D é o maior subconjunto de $\overline{X}$ no qual pode ser definida uma extensão contínua de f. Uma informação interessante sobre D é fornecida pela proposição abaixo, onde é essencial admitir que N é completo, mas f não precisa ser contínua.

Proposição 11. *Seja* $f\colon X \to N$ *definida num subconjunto* X *de um espaço métrico* M *e tomando valores no espaço métrico completo* N. *O conjunto* D, *formado pelos pontos* $a \in \overline{X}$ *tais que existe* $\lim_{x\to a} f(x)$, *é uma interseção enumerável de subconjuntos abertos de* M.

Demonstração. Consideremos inicialmente o caso em que X é denso em M. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja A_n o conjunto dos pontos $a \in M$ para cada um dos quais existe um $\delta > 0$ tal que $x, y \in X$, $d(x,a) < \delta$, $d(y,a) < \delta \Rightarrow (d(f(x), f(y)) < 1/n$. Equivalentemente:

$$A_n = \{a \in M; \exists\, B = B(a;\delta), \operatorname{diam} f(B \cap X) < 1/n\}$$

e também

$$A_n = \{a \in M; \exists\, U \text{ aberto}, a \in U, \operatorname{diam} f(U \cap X) < 1/n\}.$$

Esta última descrição mostra que A_n é aberto em M pois se $a \in A_n$ então $a \in U \subset A_n$. Por outro lado, a definição de A_n foi tomada de forma que o critério de Cauchy nos dê imediatamente: $a \in D \Leftrightarrow$ existe $\lim_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow a \in A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo $D = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap \ldots$. Se X não é denso em M, só tem sentido $\lim_{x\to a} f(x)$ quando $a \in \overline{X}$. Assim: existe $\lim_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow a \in \overline{X} \cap A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, a conclusão válida é

$$D = \overline{X} \cap (A_1 \cap \cdots \cap A_n \cap \ldots).$$

Mas nem tudo está perdido pois se escrevermos

$$V_n = \left\{x \in M; d(x, X) < \frac{1}{n}\right\} = \bigcup_{x\in X} B\left(x; \frac{1}{n}\right),$$

cada V_n é aberto em M e, além disso $\overline{X} = V_1 \cap \cdots \cap V_n \cap \ldots$. Segue-se então que $D = (V_1 \cap \cdots \cap V_n \cap \ldots) \cap (A_1 \cap \cdots \cap A_n \cap \ldots) = V_1 \cap A_1 \cap V_2 \cap A_2 \cap \ldots$ é uma interseção enumerável de abertos em M.

Proposição 12. *Sejam M e N espaços métricos. O conjunto dos pontos de continuidade de uma aplicação $f\colon M \to N$ é uma interseção enumerável de subconjuntos abertos de M.*

Demonstração. É uma simplificação da prova da Proposição 11. Seja C o conjunto dos pontos em que f é contínua. Então $C = \{a \in M; \lim_{x\to a} f(x) \text{ existe}\}$. Para cada n, seja A_n o conjunto dos pontos $a \in M$ tais que existe um aberto $U \ni a$ com $x, y \in U \Rightarrow d(f(x), f(y)) < 1/n$. Evidentemente cada A_n é aberto e $C = \cap A_n$.

5 Completamento de um espaço métrico

Nosso objetivo agora é mostrar que todo espaço métrico M pode ser ampliado, acrescentando-lhe novos pontos, de modo a obter um espaço métrico completo $\widehat{M}$, chamado o completamento de M. Como um subconjunto fechado de um espaço métrico completo é ainda completo, o fecho de M em $\widehat{M}$ é completo e contém M. Logo não há necessidade de considerar os demais pontos de $\widehat{M}$ além dos que são aderentes a M. Assim, imporemos que M seja

denso no seu completamento. Quando procurarmos completar M, não exigiremos que se tenha $M \subset \widehat{M}$. Basta que encontremos uma imersão isométrica $\varphi\colon M \to N$, onde N é completo. Tomaremos então $\widehat{M} = \overline{\varphi(M)}$ como completamento de M. Como M e $\varphi(M)$ são isométricos, tudo se passa como se tivéssemos realmente $M \subset \widehat{M}$. Formalmente, a definição é a seguinte.

Um *completamento* de um espaço métrico M é um par $(\widehat{M}, \varphi)$, onde $\widehat{M}$ é completo e $\varphi\colon M \to \widehat{M}$ é uma imersão isométrica cuja imagem $\varphi(M)$ é densa em $\widehat{M}$.

Muitas vezes se diz simplesmente que $\widehat{M}$ é um completamento de M, quando é evidente no contexto qual é φ. Freqüentemente, considera-se $M \subset \widehat{M}$, identificando-se M com sua imagem $\varphi(M)$.

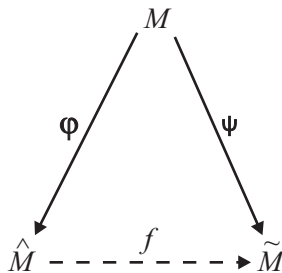
Exemplo 17. $\mathbb{R}$ é um completamento de $\mathbb{Q}$. Se M é um espaço métrico completo então, para todo subconjunto $X \subset M$, seu fecho $\overline{X}$ em M é um completamento de X. Em particular, o intervalo $[0,1]$ é um completamento de $(0,1)$.

Proposição 13. (*Existência do completamento.*) *Todo espaço métrico possui um completamento.*

Demonstração. Dado o espaço métrico M, vimos no Exemplo 27, Capítulo 1, que existe uma imersão isométrica $\varphi\colon M \to \mathcal{B}(M;\mathbb{R})$ onde $\mathcal{B}(M;\mathbb{R})$ é o espaço vetorial normado constituído pelas funções limitadas $f\colon M \to \mathbb{R}$. Pela Proposição 8, $\mathcal{B}(M;\mathbb{R})$ é completo. Basta então tomar $\widehat{M} = \overline{\varphi(M)}$.

Observação. Para todo $x \in M$, seja $d_x\colon M \to \mathbb{R}$ a função definida por $d_x(y) = d(x,y)$. Fixando um ponto $a \in M$, a imersão isométrica φ é dada por $\varphi(x) = d_x - d_a$. Logo, tem-se, na realidade, uma imersão isométrica $\varphi\colon M \to C_0(M;\mathbb{R})$, onde $\mathcal{C}_0(M;\mathbb{R})$ é o espaço (vetorial normado completo) das funções *contínuas* limitadas de M em $\mathbb{R}$. A imersão φ aqui definida depende da escolha arbitrária de um ponto $a \in M$. Referimo-nos ao Exemplo 27, Capítulo 1 para ver como se pode evitar essa arbitrariedade, às custas de fazer φ tomar valores num espaço que não é vetorial.

Proposição 14. (*Unicidade do completamento.*) *Sejam* $(\widehat{M}, \varphi)$ *e* $(\widetilde{M}, \psi)$ *dois completamentos do mesmo espaço métrico* M. *Existe uma única isometria* $f\colon \widehat{M} \to \widetilde{M}$ *tal que* $f \circ \varphi - \psi$.

Demonstração. A condição $f \circ \varphi = \psi$ já define f na imagem $\varphi(M)$: para cada $y = \varphi(x) \in \varphi(M)$, pomos $f_0(y) = \psi(x)$. Como φ é injetiva, isto define uma aplicação $f_0 \colon \varphi(M) \to \widetilde{M}$, que cumpre $f_0 \circ \varphi = \psi$ e portanto é uma isometria de $\varphi(M)$ sobre $\psi(M)$. Pelo Corolário 2 da Proposição 10, existe uma única isometria $f \colon \widehat{M} \to \widetilde{M}$ que estende f_0, isto é, tal que $f \circ \varphi = \psi$.

A Proposição 14 mostra que não importa qual o artifício particular por nós utilizado para obter o completamento $\widehat{M}$. Qualquer método conduz essencialmente ao mesmo resultado. De agora em diante, diremos "o completamento" e não "um completamento".

Exemplo 18. Dois espaços homeomorfos podem ter completamentos não-homeomorfos. Assim, o intervalo $(0, 2\pi)$, cujo completamento é $[0, 2\pi]$, é homeomorfo a $S^1 - \{p\}$, onde $p = (1, 0)$, mas o completamento de $S^1 - \{p\}$ é S^1. Como sabemos S^1 e $[0, 2\pi]$ não são homeomorfos. (Vide §5, Capítulo 4.)

Exemplo 19. Se dois espaços métricos M e N são uniformemente homeomorfos, seus completamentos $\widehat{M}$ e $\widehat{N}$ são (uniformemente) homeomorfos. Com efeito, pelo Corolário 1 da Proposição 10, todo homeomorfismo uniforme $h \colon M \to N$ se estende a um homeomorfismo uniforme $\widehat{h} \colon \widehat{M} \to \widehat{N}$. Segue-se do exemplo anterior que não pode existir um homeomorfismo uniforme entre $(0, 2\pi)$ e $S^1 - \{p\}$.

Exemplo 20. O completamento do produto cartesiano $M \times N$ é o produto $\widehat{M} \times \widehat{N}$, onde $\widehat{M}$ e $\widehat{N}$ são os completamentos de M e N respectivamente. Com efeito, admitindo $M \subset \widehat{M}$ e $N \subset \widehat{N}$ densos, o produto $M \times N$ é denso no espaço completo $\widehat{M} \times \widehat{N}$.

Exemplo 21. Seja E um espaço vetorial normado. Seu completamento $\widehat{E}$ pode, de modo único, ser munido de uma estrutura de espaço vetorial normado que estende a estrutura correspondente de

E. Com efeito, a adição $s\colon E \times E \to E$ é uniformemente contínua, logo se estende, de modo único, a uma aplicação (que indicaremos com a mesma notação) $s\colon \widehat{E} \times \widehat{E} \to \widehat{E}$. As propriedades comutativa e associativa da adição em E mantêm-se em $\widehat{E}$ por passagem ao limite. Por exemplo, dados $x, y \in \widehat{E}$, temos $x = \lim x_n$, $y = \lim y_n$, com $x_n, y_n \in E$. Logo

$$x + y = \lim(x_n + y_n) = \lim(y_n + x_n) = y + x.$$

Do mesmo modo se vê que o zero $0 \in E$ ainda se mantém como elemento neutro da adição em $\widehat{E}$. A aplicação $x \mapsto -x$, sendo uma isometria de E, estende-se de modo único a uma isometria de E. A relação $x + (-x) = 0$, válida em E, mantém-se verdadeira em $\widehat{E}$, por passagem a limite. A multiplicação $m\colon \mathbb{R} \times E \to E$ é uniformemente contínua em cada parte limitada de $\mathbb{R} \times E$. Logo tem uma extensão contínua $m\colon \mathbb{R} \times \widehat{E} \to \widehat{E}$. Dados $\lambda \in \mathbb{R}$ e $x \in \widehat{E}$, temos $x = \lim x_n$, $x_n \in E$, e $m(\lambda, x) = \lim(\lambda \cdot x_n)$. As relações do tipo $\lambda(x+y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$, etc. são válidas por passagem ao limite. Isto tudo nos mostra que $\widehat{E}$ pode ser munido de uma estrutura de espaço vetorial cujas operações estendem as de E. Estas operações são contínuas em relação à métrica $\widehat{d}$ de $\widehat{E}$. Tal métrica provém de uma norma pois

$$\widehat{d}(x + a, y + a) = \lim d(x_n + a_n, y_n + a_n) = \lim d(x_n, y_n) = \widehat{d}(x, y)$$

e

$$\widehat{d}(\lambda x, \lambda y) = \lim d(\lambda x_n, \lambda y_n) = |\lambda| \cdot \lim d(x_n, y_n) = |\lambda| \cdot \widehat{d}(x, y).$$

A norma em $\widehat{E}$ da qual $\widehat{d}$ provém é a função $x \mapsto \widehat{d}(x, 0)$, a qual estende $x \mapsto d(x, 0)$ em E, ou seja, estende $x \mapsto |x|$.

Exemplo 22. De modo análogo ao visto acima, se mostra que o completamento $\widehat{E}$ de um espaço vetorial E, munido de produto interno, pode também ser dotado de uma estrutura de espaço vetorial com produto interno, que estende a de E.

6 Espaços métricos topologicamente completos

Como ser completo não é uma propriedade topológica, surge naturalmente a pergunta: dado um espaço métrico (M, d), existe alguma métrica d_1, equivalente a d, que torne M completo? Isto corresponde a indagar se M é homeomorfo a algum espaço métrico completo. [De fato, se d_1 é equivalente a d então a aplicação identidade $(M, d) \to (M, d_1)$ é um homeomorfismo e, reciprocamente, se $h\colon (M, d) \to (N, d_N)$ é um homeomorfismo então $d_1(x, y) = d_N(h(x), h(y))$ é uma métrica em M, equivalente a d, tal que $h\colon (M, d_1) \to (N, d_N)$ é uma isometria, logo (M, d_1) é completo se N o for.]

Por exemplo, o intervalo aberto $(-1, 1)$, com a métrica induzida da reta, não é completo mas $h\colon (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $h(x) = x/(1 - |x|)$, é um homeomorfismo sobre um espaço completo. Assim, a métrica $d_1(x, y) = |h(x) - h(y)|$ é equivalente à métrica $|x - y|$ em $(-1, 1)$ e o torna um espaço métrico completo. Mais geralmente, vale a

Proposição 15. *Todo subconjunto aberto de um espaço métrico completo é homeomorfo a um espaço métrico completo.*

Demonstração. Seja $A \subset M$ aberto no espaço métrico completo M. Então $M - A$ é fechado e, por conseguinte, a função contínua $\varphi\colon M \to \mathbb{R}$, definida por $\varphi(x) = d(x, M - A)$, é tal que $\varphi(x) > 0 \Leftrightarrow x \in A$. Segue-se que $f\colon A \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/\varphi(x)$, é contínua. Seja $F \subset A \times \mathbb{R} \subset M \times \mathbb{R}$ o gráfico de f. Temos

$$F = \{(x, t) \in M \times \mathbb{R}; x \in A, t = 1/\varphi(x)\} = \{(x, t) \in M \times \mathbb{R}; t \cdot \varphi(x) = 1\}.$$

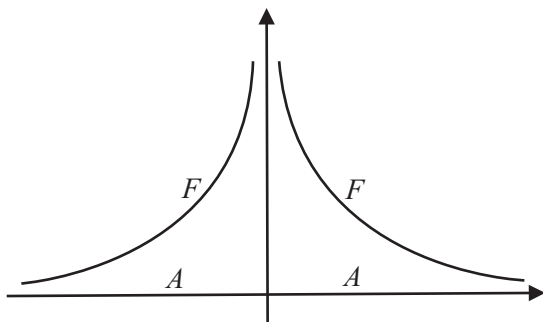
A segunda igualdade mostra que F é um subconjunto fechado do espaço métrico completo $M \times \mathbb{R}$. (Vide Proposições 6 e 7.) Logo F é um espaço métrico completo, quando munido da métrica induzida por $M \times \mathbb{R}$, digamos

$$d[(x, f(x)), (y, f(y))] = d(x, y) + |f(x) - f(y)|.$$

Como $x \mapsto (x, f(x))$ é um homeomorfismo entre A e F, a proposição fica demonstrada.

Pelo que vimos, a métrica

$$d_1(x,y) = d(x,y) + \left| \frac{1}{d(x, M-A)} - \frac{1}{d(y, M-A)} \right|$$

é equivalente a d em A e torna o aberto $A \subset M$ completo quando M o é. Intuitivamente, isto equivale a ampliar as distâncias à medida que nos aproximamos da fronteira de A. É instrutivo examinar o caso particular $A = \mathbb{R} - \{0\}$. Seguindo os passos da demonstração acima, a função $\varphi(x) = d(x, M - A)$ e $\varphi(x) = |x|$, de modo que o espaço métrico completo homeomorfo a A é $F = \{(x, 1/|x|);\ x \neq 0\} \subset \mathbb{R}^2$. F consiste em dois ramos de hipérbole. Como vemos, ao nos aproximarmos de 0 em A, as imagens em F tendem ao infinito.

A função $h\colon (0,1] \to [1, +\infty)$, $h(x) = 1/x$, é um homeomorfismo do espaço não-completo $(0,1]$ sobre o espaço completo $[1, +\infty)$. Como $(0,1]$ não é aberto em $\mathbb{R}$, esta situação não está coberta pela proposição acima. Vale, porém, o caso mais geral seguinte:

Proposição 16. *Seja $C = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_i \cap \ldots$ uma interseção enumerável de subconjuntos abertos de um espaço métrico completo M. Então C é homeomorfo a um espaço métrico completo.*

Demonstração. Suponhamos cada A_i munido de uma métrica d_i, equivalente à induzida por M, tal que (A_i, d_i) seja completo. (Vide a proposição anterior.) Então o produto cartesiano $\prod_{i=1}^{\infty} A_i$ é um espaço métrico completo. Seja $\Delta \subset \Pi A_i$ a *diagonal*, formada pelos pontos $(x, x, \ldots, x, \ldots)$ com todas as coordenadas iguais. Desse modo, temos $(x, x, \ldots, x, \dot{)} \in \Delta \Leftrightarrow x \in C$. Logo, a aplicação

$h\colon C \to \Pi A_i$, definida por $h(x) = (x, x, \ldots, x, \ldots)$, é uma bijeção contínua de C sobre Δ. Mais ainda, $h\colon C \to \Delta$ é um homeomorfismo, pois qualquer projeção $p_i\colon \Pi A_i \to A_i$, restrita a Δ, é igual ao inverso de h. Resta apenas verificar que Δ, com a métrica induzida do produto, é um espaço métrico completo. Com efeito,

$$\Delta = \{z \in \Pi A_i\,; p_1(z) = p_i(z) \text{ para } i = 1, 2, \ldots\}.$$

Logo Δ é um subconjunto fechado do produto.

Exemplo 23. Seja $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots\}$ o conjunto dos números racionais. Para cada $i \in \mathbb{N}$, seja $A_i = \mathbb{R} - \{r_i\}$. Então cada A_i é aberto em $\mathbb{R}$ e $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_i \cap \ldots$ é o conjunto dos números irracionais. Segue-se da proposição anterior que o conjunto dos números irracionais é homeomorfo a um espaço métrico completo! (Não, caro leitor, nem todo espaço métrico tem essa propriedade. Veremos no §7 adiante que $\mathbb{Q}$ não é homeomorfo a um espaço métrico completo.)

A fim de completar esta discussão, definiremos um *espaço métrico topologicamente completo* como um espaço métrico (M, d) que é homeomorfo a um espaço métrico completo, ou, equivalentemente, tal que existe uma métrica d_1, equivalente a d, de forma que (M, d_1) seja completo.

Diremos que um subconjunto X de um espaço métrico M é *um G_δ em M* quando X é interseção enumerável de subconjuntos abertos em M. Diremos que um espaço métrico M é *um G_δ absoluto* quando todo subespaço $X \subset N$ isométrico a M é um G_δ em N. (De modo mais simples: quando M é um G_δ em qualquer espaço que o contenha.)

Exemplo 24. Se $X \subset M$ é um conjunto fechado então, para cada $n \in \mathbb{N}$ pomos $A_n(X) = \{x \in M; d(x; X) < 1/n\}$. Cada A_n é aberto em M e $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ pois $x \notin X \Rightarrow d(x, X) > 0 \Rightarrow d(x, X) > 1/n_0$ para algum $n_0 \Rightarrow x \notin A_{n_0} \Rightarrow x \notin \cap A_n$. Portanto, todo subconjunto fechado $X \subset M$ é um G_δ. Como exemplo de um G_δ absoluto, mencionaremos um espaço M que consta de um único ponto. Em todo espaço métrico contendo M, o conjunto M é fechado e portanto um G_δ. Exemplos menos triviais de G_δ's absolutos resultam da proposição seguinte.

Proposição 17. *Um espaço métrico M é topologicamente completo se, e somente se, é um G_δ absoluto.*

Demonstração. Se M é um G_δ absoluto então, em particular, considerando $M \subset \widehat{M}$, obtemos M como interseção enumerável de subconjuntos abertos do seu completamento $\widehat{M}$. Pela Proposição 16, M é homeomorfo a um espaço métrico completo. Reciprocamente, seja M topologicamente completo e contido, como subespaço, num espaço métrico N. Provemos que M é um G_δ em N. Existe um homeomorfismo $f\colon M \to M_1$, de M sobre um espaço métrico completo M_1. O conjunto dos pontos $a \in \overline{M}$ (fecho de M em N) tais que existe o limite $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ é, pela Proposição 11, um G_δ em N. Ora, tal conjunto se resume a M pois se $a \in \overline{M}$ e $b = \lim\limits_{x\to a} f(x) \in M_1$ existe então, tomando uma seqüência de pontos $x_n \in M$, com $\lim x_n = a$, temos $\lim f(x_n) = b$ e, como $f^{-1}\colon M_1 \to M$ é contínua, daí resulta $\lim x_n = f^{-1}(b)$. Logo $a = f^{-1}(b)$, donde $a \in M$. Assim M é um G_δ absoluto.

Corolário. *Um espaço métrico M é um G_δ absoluto se, e somente se, para todo espaço métrico N, qualquer subconjunto $X \subset N$ homeomorfo a M é uma interseção enumerável de abertos em N.*

Com efeito, se M é um G_δ absoluto e $X \subset N$ é homeomorfo a M então, junto com M, X é topologicamente completo e portanto é um G_δ em N.

7 O teorema de Baire

Neste parágrafo, introduziremos uma classe de conjuntos que, num certo sentido, são insignificantes dentro do espaço métrico que os contém. Trata-se de uma noção análoga à de conjunto de medida nula, que existe em Análise.

Seja M um espaço métrico. Um subconjunto $X \subset M$, para ser considerado insignificante do ponto de vista topológico, deve, antes de tudo, ter interior vazio. Ou, equivalentemente: seu complementar $M - X$ deve ser denso em M. Além disso, esta noção deve ser definida de tal modo que todo subconjunto e toda reunião enumerável de conjuntos topologicamente insignificantes ainda tenha esta propriedade.

Não bastaria definir como insignificante um conjunto cujo interior fosse vazio pois $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ têm interior vazio, enquanto sua reunião é toda a reta $\mathbb{R}$.

Uma idéia melhor seria considerar como insignificante um conjunto $X \subset M$ cujo fecho $\overline{X}$ tivesse interior vazio em M. De fato, se $\operatorname{int} \overline{X} = \varnothing$ e $\operatorname{int} \overline{Y} = \varnothing$ então $\operatorname{int}(\overline{X \cup Y}) = \operatorname{int}(\overline{X} \cup \overline{Y}) = \varnothing$ como se vê facilmente.

Mesmo assim, não é verdade que $\operatorname{int} \overline{X}_n = \varnothing$ para todo $n \in \mathbb{N}$ implique que $X = \cup X_n$ ainda goze da propriedade $\operatorname{int} \overline{X} = \varnothing$. Basta tomar o conjunto $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots\} = \bigcup_n \{r_n\}$ dos números racionais. Para cada n, o fecho de $\{r_n\}$ tem interior vazio mas $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

A definição correta de conjunto insignificante é a seguinte.

Um subconjunto X de um espaço métrico M, diz-se *magro* em M quando é uma reunião enumerável, $X = \cup X_n$, tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{int} \overline{X}_n = \varnothing$.

Para que X seja magro em M, é necessário e suficiente que $X \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, onde $F_1, \ldots, F_n, \ldots$ são fechados com interior vazio em M.

É imediato que todo subconjunto e toda reunião enumerável de conjuntos magros são ainda conjuntos magros.

Não é verdade, porém, que todo subconjunto magro $X \subset M$ tenha interior vazio em M. Por exemplo, qualquer subconjunto $X \subset \mathbb{Q}$ é magro, pois é reunião enumerável dos seus pontos, cada um dos quais tem interior vazio em $\mathbb{Q}$, mas X não precisa ter interior vazio em $\mathbb{Q}$. Isto ocorre apenas porque o espaço $\mathbb{Q}$ não é completo, conforme resulta do Teorema de Baire, a seguir. É, portanto, nos espaços métricos completos que os conjuntos magros cumprem as condições que estipulamos acima para conjuntos insignificantes.

Exemplo 25. Um ponto num espaço métrico tem interior vazio se, e somente se, não é isolado. Em conseqüência, um conjunto enumerável $X \subset M$ é magro se, e somente se, nenhum dos seus pontos é isolado. Uma reta no plano $\mathbb{R}^2$ é um subconjunto magro. Mais geralmente, toda reunião enumerável de retas é magra em $\mathbb{R}^2$. Veremos logo mais que $\mathbb{R}$ não é magro em $\mathbb{R}$, isto é, não se pode escrever $\mathbb{R} = \cup F_n$ onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, F_n é fechado com interior

vazio.

Sabemos que $\operatorname{int} X = \varnothing$ em $M \Leftrightarrow M - X$ é denso em M. Segue-se que um subconjunto $F \subset M$ é um fechado com interior vazio se, e somente se, seu complementar $M - F$ é um aberto denso em M. Portanto $\operatorname{int} \overline{X} = \varnothing \Leftrightarrow X$ está contido num fechado com interior vazio $\Leftrightarrow M - X$ contém um aberto denso $\Leftrightarrow \operatorname{int}(M - X)$ é denso.

Na terminologia antiga, um conjunto magro era chamado *conjunto de primeira categoria*. Eram chamados de *conjuntos de segunda categoria*, aqueles que não eram magros.

Exemplo 26. A fronteira de um conjunto aberto $A \subset M$ constitui um exemplo de conjunto fechado com interior vazio. Com efeito, se $x \in \partial A$ então qualquer bola de centro x contém pontos de A e, como $A \cap \partial A = \varnothing$, vemos que nenhuma bola com centro x pode estar contida em ∂A. Assim, ∂A tem interior vazio. Como $\partial A = \partial(M - A)$, vemos que a fronteira de qualquer subconjunto fechado $F \subset M$ também tem interior vazio. Se $X \subset M$ não é aberto nem fechado, sua fronteira pode não ter interior vazio. Por exemplo, $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$ na reta.

Exemplo 27. O *conjunto de Cantor* K é um subconjunto fechado do intervalo $[0, 1]$, obtido como complementar de uma reunião de intervalos abertos, do seguinte modo. Retira-se do intervalo $[0, 1]$ seu terço médio aberto $(1/3, 2/3)$. Depois retira-se o terço médio aberto de cada um dos intervalos restantes $[0, 1/3]$ e $[2/3, 1]$. Sobra então

$$\left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Em seguida, retira-se o terço médio aberto de cada um destes quatro intervalos. Repete-se o processo indefinidamente. O conjunto K dos pontos não retirados é o conjunto de Cantor. Se indicarmos com $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ os intervalos abertos omitidos, teremos $K = [0, 1] - \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, logo K é fechado em $[0, 1]$ e portanto fechado em $\mathbb{R}$. Note-se que os pontos extremos dos intervalos omitidos, como $1/3$, $2/3$, $1/9$, $2/9$, $7/9$, $8/9$, etc. pertencem ao conjunto de Cantor pois em cada etapa da construção de K são retirados apenas pontos interiores aos intervalos que restaram na etapa anterior. Estes pontos extremos dos intervalos omitidos formam um subconjunto infinito enumerável de K. Veremos logo mais que K,

entretanto, não é enumerável. Por enquanto, notemos apenas que K não contém intervalo aberto algum e portanto $\operatorname{int} K = \varnothing$. Com efeito, depois da n-ésima etapa da construção de K restam apenas intervalos de comprimento $1/3^n$. Portanto, dado qualquer intervalo $J \subset [0,1]$, de comprimento $\ell > 0$, se tomarmos n tal que $1/3^n < \ell$, o intervalo J será mutilado depois da n-ésima etapa da formação de K. Assim, o conjunto de Cantor é um fechado com interior vazio e portanto magro na reta $\mathbb{R}$. Resultará do Teorema de Baire que K não é magro em si mesmo, isto é, não se pode escrever $K = \cup F_n$ como reunião de conjuntos fechados com interiores vazios em K.

A proposição seguinte generaliza o "princípio dos intervalos encaixantes", um importante fato básico sobre números reais.

Proposição 18. *Um espaço métrico M é completo se, e somente se, para toda seqüência decrescente $F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset \ldots$ de subconjuntos fechados não-vazios $F_n \subset M$, com $\lim\limits_{n\to\infty} \cdot \operatorname{diam} F_n = 0$, existe um ponto $a \in M$ tal que $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n = \{a\}$.*

Demonstração. Suponhamos que M seja completo e que nos seja dada uma seqüência (F_n) como acima. Para cada $n \in \mathbb{N}$, escolhamos um ponto $x_n \in F_n$. Isto define uma seqüência (x_n) em M tal que $m, n > n_0 \Rightarrow x_m, x_n \in F_{n_0}$. Ora, para todo $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que $\operatorname{diam} F_{n_0} < \varepsilon$. Então $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$, e portanto (x_n) é uma seqüência de Cauchy em M. Seja $\lim x_n = a \in M$. Dado qualquer $p \in \mathbb{N}$, temos $x_n \in F_p$ para todo $n \geq p$, donde $a = \lim x_n \in F_p$ para todo $p \in \mathbb{N}$, ou seja, $a \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. Evidentemente não podem existir dois pontos $a \neq b$ nesta interseção porque isto obrigaria $d(a,b) \leq \operatorname{diam} F_n$ para todo n. Logo, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n = \{a\}$. Reciprocamente, se a interseção de toda seqüência decrescente de fechados não-vazios cujos diâmetros tendem a zero é um ponto de M, provaremos que M é completo. Com efeito, seja (x_n) uma seqüência de Cauchy em M. Para todo $n \in \mathbb{N}$, ponhamos $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$. Então $X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_n \supset \ldots$ e, por conseguinte $(\overline{X}_n)$ é uma seqüência decrescente de fechados não-vazios. Além disso, temos $0 = \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam} X_n = \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam} \overline{X}_n$. Logo existe $a \in M$ tal que $\cap \overline{X}_n = \{a\}$. Como $a \in \overline{X}_n$ para todo n, segue-se

que qualquer bola aberta de centro a contém pontos x_n com índices arbitrariamente grandes, ou seja, a é limite de uma subseqüência de (x_n). Como esta seqüência é de Cauchy, concluímos que $a = \lim x_n$.

Exemplo 28. Na proposição acima, é indispensável supor que $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} F_n = 0$. Com efeito, os conjuntos $F_n = [n, +\infty)$ são fechados na reta e vale $F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset \ldots$ mas $\cap F_n = \varnothing$. Também no espaço de Hilbert ℓ^2, que é completo, podemos tomar, para cada n, $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ e $F_n = \{e_n, e_{n+1}, \ldots\}$. Cada F_n é fechado, tem-se $F_n \supset F_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ mas $\cap F_n = \varnothing$. Neste caso, ocorre $\operatorname{diam} F_n = \sqrt{2}$ para cada n.

O resultado principal deste parágrafo, e um dos mais férteis da teoria dos Espaços Métricos é o seguinte.

Proposição 19. (*Teorema de Baire.*) *Seja M um espaço métrico completo. Todo conjunto magro em M tem interior vazio. Equivalentemente: se $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, onde cada F_n é fechado em M e tem interior vazio, então $\operatorname{int} F = \varnothing$. Ou então: toda interseção enumerável de abertos densos é um subconjunto denso em M.*

Demonstração. Provaremos a terceira destas afirmações. Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ subconjuntos abertos densos no espaço métrico completo M. Queremos provar que $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ é denso em M, isto é, que toda bola aberta B_1 em M contém algum ponto de A. Ora, como A_1 é aberto e denso, $B_1 \cap A_1$ é aberto e não-vazio, logo contém uma bola aberta B_2, a qual podemos supor tão pequena que seu raio não exceda $1/2$ e seu fecho esteja contido em $B_1 \cap A_1$. Por sua vez, A_2 sendo aberto e denso, $B_2 \cap A_2$ é aberto e não-vazio. Logo existe uma bola aberta B_3, de raio inferior a $1/3$, com $\overline{B}_3 \subset A_2 \cap B_2$. Prosseguindo assim, obtemos uma seqüência $\overline{B}_1 \supset \overline{B}_2 \supset \cdots \supset \overline{B}_n \supset \ldots$, com $\overline{B}_{n+1} \subset B_n \cap A_n$ e $\operatorname{diam} B_n \to 0$. Pela proposição anterior, existe $a \in M$ tal que $A = \cap \overline{B}_n$. A relação $\overline{B}_{n+1} \subset B_n \cap A_n$ mostra que a pertence a todos os A_n (além de pertencer a B_1). Logo $a \in A \cap B_1$, como queríamos demonstrar.

Corolário. *Seja M um espaço métrico completo. Se $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, onde cada F_n é fechado em M, então existe pelo menos um n tal que $\operatorname{int} F_n \neq \varnothing$.*

De fato, se fosse $\operatorname{int} F_n = \varnothing$ para todo n, então, pelo Teorema de Baire, a reunião dos F_n teria interior vazio em M, o que é absurdo pois tal reunião é M.

Uma versão mais forte do corolário acima será provada logo mais.

Observação. O Teorema de Baire é um fato topológico: refere-se a abertos, fechados, fechos e interiores. Portanto continua válido se substituirmos a métrica do espaço completo M por outra equivalente, mesmo que com isto se perca a completeza. Por exemplo, o intervalo aberto $(0,1)$ não pode ser expresso como reunião enumerável de subconjuntos fechados com interior vazio. Em suma: o Teorema de Baire, ao contrário da maioria dos fatos estabelecidos neste capítulo, continua válido se supusermos, em seu enunciado, M topologicamente (isto é, homeomorfo a um espaço) completo. Por exemplo, se M é um subconjunto aberto de um espaço métrico completo então $M = \cup F_n$, onde cada F_n é fechado em M, implica que algum dos F_n tem interior não-vazio em M. Isto acarreta a seguinte versão mais forte do corolário anterior.

Proposição 20. *Seja M um espaço métrico completo. Se $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, onde cada F_n é fechado em M, então $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{int} F_n$ é um aberto denso em M.*

Demonstração. Com efeito, seja U um aberto não-vazio em M. Queremos provar que $U \cap A \neq \varnothing$, ou seja, que existe n tal que $U \cap \operatorname{int} F_n \neq \varnothing$. Ora, temos $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} (U \cap F_n)$, onde cada $U \cap F_n$ é, evidentemente, fechado em U. Pela observação anterior, existe n tal que $\operatorname{int}(U \cap F_n) \neq \varnothing$. (Como U é aberto, tanto faz considerar o interior relativo ao subespaço U como relativo a M.) Como o interior de $U \cap F_n$ é um aberto contido em U e em F_n, vemos que $\operatorname{int}(U \cap F_n) = U \cap \operatorname{int} F_n$ e portanto $U \cap \operatorname{int} F_n \neq \varnothing$, como queríamos demonstrar.

Exemplo 29. Se M é um espaço métrico completo enumerável então segue-se da proposição anterior que o conjunto dos pontos isolados de M é um conjunto (aberto e) denso em M. Em particular, todo subconjunto fechado infinito enumerável do espaço $\mathbb{R}^n$ contém uma infinidade de pontos isolados. Isto fornece uma demonstração

de que $\mathbb{R}$ não é enumerável. Consideremos agora o espaço $\mathbb{Q}$ dos números racionais. Sendo enumerável e sem pontos isolados, nenhuma métrica equivalente à sua poderá torná-lo completo. Ou seja, $\mathbb{Q}$ não é topologicamente completo. Logo $\mathbb{Q}$ não é um G_δ em $\mathbb{R}$: não se pode escrevê-lo como interseção enumerável de subconjuntos abertos da reta. Em particular, não existe uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cujo conjunto dos pontos de continuidade seja $\mathbb{Q}$. [Por outro lado, há uma conhecida função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que é contínua nos números irracionais e descontínua nos números racionais. Basta tomar $f(x) = 0$ se x é irracional, $f(p/q) = 1/q$ se p/q é uma fração irredutível e $f(0) = 1$. Detalhes por conta do leitor.]

Exemplo 30. Sejam M um espaço métrico completo, E um espaço vetorial normado e $\mathcal{E}$ um conjunto de aplicações contínuas $f\colon M \to E$. Suponhamos que $\mathcal{E}$ seja pontualmente limitado, isto é, que para cada ponto $x \in M$ exista $c_x > 0$ tal que $|f(x)| \leq c_x$ para todo $f \in \mathcal{E}$. Afirmamos que existe um aberto não-vazio U em M tal que $\mathcal{E}$ é uniformemente limitado em U, ou seja, existe uma constante $c > 0$ tal que $|f(x)| \leq c$ para toda $f \in \mathcal{E}$ e todo $x \in U$. Com efeito, para todo $n \in \mathbb{N}$ o conjunto

$$F_n = \{x \in M; |f(x)| \leq n \text{ para toda } f \in \mathcal{E}\}$$

é fechado em M. (Vide Corolário 3 da Proposição 9, Capítulo 3.) Além disso, como $\mathcal{E}$ é pontualmente limitado, para cada $x \in M$ existe algum n tal que $x \in F_n$. Em outras palavras, temos $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Sendo M completo, existe algum n tal que $U = \operatorname{int} F_n \neq \varnothing$. Para todo $x \in U$ e toda $f \in \mathcal{E}$, temos $|f(x)| \leq n$, logo $\mathcal{E}$ é uniformemente limitada no subconjunto aberto não-vazio U.

Exemplo 31. O Teorema de Baire pode ser usado para provar que o conjunto de Cantor K não é enumerável. Como K é fechado na reta, basta mostrar que nenhum dos seus pontos é isolado. Com efeito, suponhamos inicialmente que $x \in K$ seja extremidade de algum intervalo, digamos (x, b), omitido de $[0, 1]$ para formar K. Quando (x, b) foi retirado, restou um certo intervalo $[a, x]$. Nas etapas seguintes da construção de K, restarão sempre terços finais de intervalo, do tipo $[a_n, x]$, com $a_n \in K$, como foi observado no

Exemplo 27. O comprimento $x - a_n$ tende para zero, logo $a_n \to x$ e assim x não é ponto isolado de K. Admitamos agora que $x \in K$ não seja extremo de intervalo retirado de $[0,1]$ durante a construção de K. Dado $\varepsilon > 0$, não pode ser $(x, x+\varepsilon) \cap K = \varnothing$ pois se este fosse o caso, o intervalo $(x, x+\varepsilon)$ teria sido omitido durante a construção de K. Na primeira vez em que uma parte desse intervalo fosse retirada, nada mais restaria de $(x, x+\varepsilon)$ pois os extremos da intervalo omitido permanecem nas retiradas seguintes. Como x permaneceu, segue-se que $(x, x+\varepsilon) \cap K = \varnothing$ que o intervalo omitido foi da forma (x, b). Mas x não é extremo de intervalo retirado, logo $(x, x+\varepsilon) \cap K \neq \varnothing$ para todo $\varepsilon > 0$ e, por conseguinte, x não é isolado em K. Segue-se que K não é enumerável. Mais ainda, como os pontos de K que são extremos dos intervalos omitidos formam evidentemente um conjunto enumerável, os pontos que não são extremos de intervalos omitidos constituem um conjunto não-enumerável.

Sabemos que uma seqüência de aplicações contínuas $f_n\colon M \to N$ pode convergir simplesmente para uma aplicação descontínua $f\colon M \to N$. Usaremos, a seguir, o Teorema de Baire para mostrar que, quando o espaço métrico M é completo, a função limite é contínua na maioria dos pontos de M, ou seja, o conjunto dos seus pontos de descontinuidade é magro. Começaremos com uma condição para que a aplicação f seja contínua num ponto.

Proposição 21. *É dada uma seqüência de aplicações $f_n\colon M \to N$, contínuas no ponto $a \in M$, convergindo simplesmente para uma aplicação $f\colon M \to N$. A fim de que f seja contínua no ponto a, é necessário e suficiente que, para cada $\varepsilon > 0$, existam $\delta > 0$ e $p \in \mathbb{N}$ tais que $d(x,a) < \delta \Rightarrow d(f_p(x), f(x)) < \varepsilon$.*

Demonstração. Suponhamos satisfeita a condição acima e provemos que f é contínua no ponto a. Dado $\varepsilon > 0$, existem $p \in \mathbb{N}$ e $\delta' > 0$ tais que

$$d(x,a) < \delta' \Rightarrow d(f_p(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}\cdot$$

Existe também $\delta'' > 0$ tal que

$$d(x,a) < \delta'' \Rightarrow d(f_p(x), f_p(a)) < \frac{\varepsilon}{3}\cdot$$

Seja $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$. Então

$$d(x,a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) \leq d(f(x), f_p(x)) + \\ + d(f_p(x), f_p(a)) + d(f_p(a), f(a)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Reciprocamente, seja f contínua no ponto a. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta' > 0$ tal que $d(x,a) < \delta' \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon/3$. Existe também $p \in \mathbb{N}$ tal que $d(f_p(a), f(a)) < \varepsilon/3$ e, como f_p é contínua no ponto a, existe $\delta'' > 0$ tal que $d(x,a) < \delta'' \Rightarrow d(f_p(x), f_p(a)) < \varepsilon/3$. Seja $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$. Então

$$d(x,a) < \delta \Rightarrow d(f_p(x), f(x)) \leq d(f_p(x), f_p(a)) + \\ + d(f_p(a), f(a)) + d(f(a), f(x)) < \varepsilon.$$

Proposição 22. *Seja M completo. Se uma seqüência de aplicações contínuas $f_n \colon M \to N$ converge simplesmente para $f \colon M \to N$ então o conjunto dos pontos de descontinuidade de f é magro em M.*

Demonstração. Para quaisquer $p, k \in \mathbb{N}$, seja $X_{pk} = \{x \in M; d(f_p(x), f(x)) \leq 1/k\}$. Segue-se da proposição anterior que f contínua no ponto $x \in M \Leftrightarrow$ para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $x \in \operatorname{int} X_{pk} \Leftrightarrow$ para todo $k \in \mathbb{N}$, $x \in \bigcup_p \operatorname{int} X_{pk}$. Seja $A_i = \bigcup_p \operatorname{int} X_{pk}$. Então f é contínua no ponto $x \in M$ se, e somente se, $x \in \bigcap_k A_k$. Resta então provar que cada um dos conjuntos A_k é denso em M. Como $M = \bigcup_p X_{pk}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, isto resultaria da Proposição 20 caso os conjuntos X_{pk} fossem fechados, o que não ocorre. Consideramos então os conjuntos

$$F_{pk} = \left\{ x \in M; d(f_p(x), f_{n+p}(x)) \leq \frac{1}{k} \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Como as f_n são contínuas, estes conjuntos são fechados em M. Além disso, para cada $x \in M$, a seqüência $(f_n(x))$ é convergente em N, e portanto de Cauchy. Logo, para cada k existe p tal que $x \in F_{pk}$. Isto diz que $M = \bigcup_p F_{pk}$. Agora podemos concluir que

$\bigcup_p \operatorname{int} F_{pk}$ é denso em M para cada $k \in \mathbb{N}$. Fazendo $n \to \infty$ na definição de F_{pk}, vemos que $F_{pk} \subset X_{pk}$, sejam quais forem p e k. Logo $\operatorname{int} F_{pk} \subset \operatorname{int} X_{pk}$ e daí concluímos que os abertos $A_k = \bigcup_p \operatorname{int} X_{pk}$ são todos densos em M, como queríamos demonstrar.

Exemplo 32. Usando a proposição acima, mostraremos que a convergência simples de funções reais de uma variável real não provém de uma métrica. Mais precisamente, dado um intervalo $I = [a, b]$, não existe uma métrica no conjunto $\mathcal{B}(I; \mathbb{R})$, das funções limitadas $f: I \to \mathbb{R}$, tal que $\lim f_n = f$ relativamente a $d \Leftrightarrow f_n \to f$ simplesmente em I. Com efeito, sejam C o conjunto das funções contínuas $g: I \to \mathbb{R}$ e $\{r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots\}$ o conjunto dos números racionais de I. Para cada n, seja $f_n: I \to \mathbb{R}$ a função que assume o valor 1 nos pontos $r_1, r_2, \ldots, r_n$ e 0 nos demais pontos de I. Se chamarmos de $f: I \to \mathbb{R}$ a função característica de $\mathbb{Q} \cap I$ (isto é, $f(x) = 1$ se x é racional e $f(x) = 0$ se x é irracional) então $f_n \to f$ simplesmente em I. Por outro lado, para cada n, existe uma seqüência de funções contínuas que converge simplesmente para f_n em I. [Basta considerar funções cujos gráficos são formados por vários triângulos isósceles cujos vértices são os pontos $(r_1, 1), \ldots, (r_n, 1)$ e têm bases cada vez menores, contidas no eixo das abcissas.] Se existisse uma métrica em $\mathcal{B}(I; \mathbb{R})$ em relação à qual a convergência fosse convergência simples, teríamos $f_n \in \overline{C}$ para cada n e portanto $\lim f_n = f \in \overline{C}$. Então existiria uma seqüência de funções contínuas $g_n: I \to \mathbb{R}$ convergindo simplesmente para f em I. Entretanto, segundo a proposição anterior, f não pode ser limite simples de uma seqüência de funções contínuas pois é descontínua em todo ponto $x \in I$. Obtemos uma contradição, logo não existe uma tal métrica em $\mathcal{B}(I; \mathbb{R})$.

Exemplo 33. Usaremos agora o Teorema de Baire para mostrar que existem funções contínuas reais que não possuem derivada em ponto algum do intervalo onde são definidas. Mais precisamente, dado qualquer intervalo $I = [a, b]$, seja $C = \mathcal{C}_0(I; \mathbb{R})$ o conjunto das funções contínuas limitadas $f: I \to \mathbb{R}$, com a métrica da convergência uniforme. (Será visto no próximo capítulo que toda função contínua $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ é limitada.) Provaremos que o con-

junto das funções $f \in C$ que possuem derivada em algum ponto de I é magro ou, mais precisamente, o conjunto das funções contínuas $f\colon I \to \mathbb{R}$ que não possuem derivada em ponto algum do intervalo I contém uma interseção enumerável de abertos densos em C. Assim, esse conjunto é denso em C e, num sentido natural, contém "a maioria" das funções contínuas $f\colon I \to \mathbb{R}$. No que se segue, sempre que escrevermos $f(t+h)$, estamos tacitamente supondo que $t+h \in I$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideraremos o conjunto

$$A_n = \left\{ f \in C;\ \text{para todo } t \in I \text{ existe } h \text{ tal que } \left| \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \right| > n \right\}.$$

Segue-se imediatamente da definição de derivada que se $f \in A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então f não possui derivada em ponto algum do intervalo $[a,b]$. Assim basta mostrar que cada conjunto A_n é aberto e denso em C. De fato, sabemos que C é um espaço métrico completo, logo a interseção $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ será um conjunto denso em C.

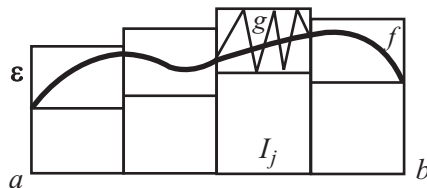
1. *Cada A_n é aberto em C.* Seja $f \in A_n$. Para todo $t \in I$, existe h tal que

$$\xi(t,h) = |f(t+h) - f(t)| - n|h| > 0.$$

Afirmamos que se pode obter $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $t \in I$ existe h com $\xi(t,h) > \varepsilon$. Com efeito, no caso contrário existiria, para cada $k \in \mathbb{N}$, algum ponto $t_k \in I$ tal que $\xi(t_k,h) \le 1/k$, seja qual for h. Um resultado a ser demonstrado no capítulo seguinte diz que toda seqüência em $I = [a,b]$ possui subseqüência convergente. Passando pois a uma subseqüência se necessário, podemos supor que $t_k \to t_o \in [a,b]$. Como ξ é contínua, concluímos que, para todo h, $\xi(t_0,h) = \lim\limits_{k\to\infty} \xi(t_k,h) \le \lim 1/k = 0$ o que é uma contradição. Obtido então o número $\varepsilon > 0$, afirmamos que $g \in C$, $||g-f|| < \varepsilon/2 \Rightarrow g \in A_n$. Com efeito, para todo $t \in I$ existe h tal que

$$n \cdot |h| + \varepsilon < |f(t+h) - f(t)| \le |f(t+h) - g(t+h)| +$$
$$+ |g(t+h) - g(t)| + |g(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2} + |g(t+h) - g(t)| + \frac{\varepsilon}{2}$$

ou seja: $|g(t+h) - g(t)| > n \cdot |h|$. Isto mostra que $g \in A_n$ e portanto A_n é aberto em C.

2. *Cada A_n é denso em C.* Novamente aqui utilizaremos um fato a ser provado no capítulo seguinte: toda função contínua $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, definida num intervalo limitado e fechado, é uniformemente contínua. Dados arbitrariamente $\varepsilon > 0$ e $f \in C$, mostraremos que existe $g \in A_n$ tal que $||g - f|| < \varepsilon$. Pela continuidade uniforme de f, existe $\delta > 0$ tal que $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Portanto, se subdividirmos o intervalo $[a,b]$ num número finito de subintervalos $I_1, \ldots, I_r$, de comprimentos menores do que δ, o gráfico de f em cada um desses subintervalos cabe num retângulo de altura $< \varepsilon$. Construirmos agora uma função contínua $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, cumprindo as condições $||g - f|| < \varepsilon$ e $g \in A_n$, fazendo com que g coincida com f nas extremidades de cada intervalo I_j e, no interior de cada I_j, o gráfico de g tenha a forma de uma serra cujos dentes têm arestas com inclinação $> n$ e estão contidos num retângulo de base I_j e altura $< \varepsilon$ que contenha o gráfico de $f|I_j$.

8 O método das aproximações sucessivas

Trataremos agora de um princípio, conceitualmente bastante simples, que tem inúmeras aplicações à Geometria, à Análise e ao Cálculo Numérico.

Suponhamos que se deseje obter a solução (ou soluções) x de uma equação $f(x) = b$, onde f é, digamos, uma aplicação contínua, definida numa parte fechada do espaço $\mathbb{R}^n$, e tomando valores em $\mathbb{R}^n$. Escrevendo $\varphi(x) = f(x) + x - b$, vemos que φ é contínua e a equação original equivale a encontrar x tal que $\varphi(x) = x$. Para resolver esta última equação, tomamos um ponto arbitrário x_0 e consideramos a seqüência de pontos $x_1{=}\varphi(x_0)$, $x_2{=}\varphi(x_1), \ldots, x_{n+1} = \varphi(x_n), \ldots$, chamados as *aproximações sucessivas* da solução procurada. Se esta seqüência convergir no domínio de φ, então $a = \lim x_n$

será tal que $a = \lim x_{n+1} = \lim \varphi(x_n) = \varphi(\lim x_n) = \varphi(a)$, isto é, a é uma raiz da equação $\varphi(x) = x$, e portanto da equação original $f(x) = b$.

Estas observações de caráter intuitivo encontram sua formalização adequada no princípio do ponto fixo para contrações, que apresentaremos a seguir.

Um *ponto fixo* de uma aplicação $f\colon M \to M$ é um ponto $x \in M$ tal que $f(x) = x$.

Exemplo 34. A origem $0 \in \mathbb{R}^n$ é o único ponto fixo da aplicação $x \mapsto -x$, de $\mathbb{R}^n$ em si mesmo. A aplicação $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2$, tem dois pontos fixos, a saber 0 e 1. Os pontos fixos de uma função real de variável real f são as abcissas dos pontos do plano em que o gráfico de f intersecta a diagonal $y = x$. Se $0 \neq a \in \mathbb{R}^n$ então a translação $x \mapsto x + a$, de $\mathbb{R}^n$ em si mesmo, não tem ponto fixo.

Exemplo 35. Um famoso resultado de Topologia, chamado o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, diz que se $B = B[0,1]$ é a bola unitária fechada do espaço $\mathbb{R}^n$, então toda aplicação contínua $f\colon B \to B$ possui (pelo menos) um ponto fixo $x \in B$. Existem várias demonstrações deste fato, mas todas elas utilizam técnicas que não estudaremos aqui. O caso $n = 1$, entretanto, é de fácil demonstração: para provar que toda função contínua $f\colon [0,1] \to [0,1]$ possui um ponto fixo, consideramos a função contínua $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, dada por $\varphi(x) = f(x) - x$. Como $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo $x \in [0,1]$, segue-se que $\varphi(0) = f(0) \geq 0$ e $\varphi(1) = f(1) - 1 \leq 0$. Pelo Teorema do Valor Intermediário (Corolário 2, Proposição 6, Capítulo 4), concluímos que deve existir $x \in [0,1]$ tal que $\varphi(x) = 0$, isto é, $f(x) = x$.

Sejam M, N espaços métricos. Uma aplicação $f\colon M \to N$ chama-se uma *contração* quando existe uma constante c, com $0 \leq c < 1$, tal que $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x,y)$ para quaisquer $x, y \in M$.

Toda contração é uniformemente contínua.

Exemplo 36. Seja $f\colon I \to \mathbb{R}$ uma função real derivável no intervalo I. Se existir uma constante c tal que $|f'(x)| \leq c < 1$ para todo $x \in I$, então f é uma contração. Por outro lado, a função $f\colon (0,1) \to (0,1)$, definida por $f(x) = x^2/2$, não é uma contração

pois $|f'(x)| = x < 1$ para todo $x \in (0,1)$ mas não existe uma constante c tal que $x < c < 1$ para todo $x \in (0,1)$. Se E, F são espaços vetoriais normados, uma transformação linear $T\colon E \to F$ é uma contração se, e somente se, sua norma $|T|$ é menor do que 1.

Proposição 23. (*Teorema de Banach, sobre pontos fixos de contrações.*) *Se M é um espaço métrico completo, toda contração $f\colon M \to M$ possui um único ponto fixo em M. Mais precisamente, se escolhermos um ponto qualquer $x_0 \in M$ e pusermos $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1), \ldots, x_{n+1} = f(x_n), \ldots$ a seqüência (x_n) converge em M e $a = \lim x_n$ é o único ponto fixo de f.*

Demonstração. Admitamos, por enquanto, que a seqüência (x_n) convirja para um ponto $a \in M$. Então, como f é contínua, temos $f(a) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = \lim x_{n+1} = a$, logo a é ponto fixo de f. Mostremos agora que f não admite dois pontos fixos distintos. De fato, se $f(a) = a$, $f(b) = b$, e vale $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x,y)$, com $0 \leq c < 1$, para $x, y \in M$ quaisquer, então $d(a,b) = d(f(a), f(b)) \leq c \cdot d(a,b)$, donde $(1-c) \cdot d(a,b) \leq 0$. Como $1 - c > 0$, concluímos que $d(a,b) = 0$, ou seja, $a = b$. Só nos resta portanto mostrar que (x_n) é uma seqüência de Cauchy em M. Ora,

$$d(x_1, x_2) = d(f(x_0), f(x_1)) \leq c \cdot d(x_0, x_1),$$
$$d(x_2, x_3) = d(f(x_1), f(x_2)) \leq c \cdot d(x_1, x_2) \leq c^2 \cdot d(x_0, x_1)$$

e, em geral, temos $d(x_n, x_{n+1}) \leq c^n \cdot d(x_0, x_1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue-se que, para $n, p \in \mathbb{N}$ quaisquer:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leq \\ &\leq [c^n + c^{n+1} + \cdots + c^{n+p-1}] \cdot d(x_0, x_1) = \\ &= c^n [1 + c + \cdots + c^{p-1}] \cdot d(x_0, x_1) \leq \frac{c^n}{1-c} \cdot d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} c^n = 0$, concluímos que (x_n) é uma seqüência de Cauchy em M, o que completa a demonstração.

Observação. Fazendo $p \to \infty$ na desigualdade $d(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{c^n}{1-c} \cdot d(x_0, x_1)$, obtemos $d(x_n, a) \leq \frac{c^n}{1-c} \cdot d(x_0, x_1)$, o que nos fornece um limite superior para o erro que cometemos ao tomar o n-ésimo iterado x_n como um valor aproximado para o ponto fixo a.

Em certas aplicações da Proposição 23, tem-se uma aplicação $f\colon M \to M$ (M, um espaço métrico completo) que, restrita a um subconjunto fechado $F \subset M$, é uma contração. Sendo F um espaço métrico completo, a fim de concluir a existência de um ponto fixo de f, basta (e é indispensável!) verificar que $f(F) \subset F$, o que se exprime dizendo que F é um subconjunto fechado *invariante* por f. Em particular, toda bola fechada, invariante por uma contração, contém o ponto fixo dessa contração. A proposição seguinte dá uma condição suficiente para que uma bola fechada seja invariante.

Proposição 24. *Seja $f\colon M \to M$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x,y)$, com $0 \leq c < 1$. Dado qualquer $a \in M$, se $r \geq \frac{d(a,f(a))}{1-c}$ então a bola fechada $B = B[a;r]$ é invariante por f, isto é, $f(B) \subset B$. Em particular, se M for completo, o ponto fixo de f está na bola B.*

Demonstração. $x \in B \Rightarrow d(x,a) \leq r \Rightarrow d(f(x),a) \leq d(f(x),f(a)) + d(f(a),a) \leq c \cdot d(x,a) + (1-c) \cdot r \leq c \cdot r + (1-c)r = r \Rightarrow f(x) \in B$.

Como aplicação do princípio da contração, provaremos um resultado que constitui o passo crucial para a demonstração do Teorema da Função Inversa em Análise.

Proposição 25. (*Perturbação da identidade.*) *Seja $\varphi\colon U \to E$ uma contração definida num subconjunto aberto U do espaço de Banach E. A aplicação $f\colon U \to E$, dada por $f(x) = x + \varphi(x)$, é um homeomorfismo de U sobre um subconjunto aberto de E.*

Demonstração. Suponhamos que, para $x, y \in U$ quaisquer, se tenha $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq c \cdot |x-y|$, com $0 \leq c < 1$. Utilizando a desigualdade $|a+b| \geq |a| - |b|$, obtemos

$$|f(x) - f(y)| = |x - y + \varphi(x) - \varphi(y)| \geq$$
$$\geq |x-y| - |\varphi(x) - \varphi(y)| \geq |x-y| - c \cdot |x-y|,$$

ou seja,

$$|f(x) - f(y)| \geq (1-c) \cdot |x-y|.$$

Isto mostra que f é injetiva e que sua inversa $f^{-1}\colon f(U) \to U$ é lipschitziana, com constante $(1-c)^{-1}$. Logo, f é um homeomorfismo de U sobre $f(U)$. Resta provar que $f(U)$ é aberto em E. Neste ponto é que usamos a existência do ponto fixo para contrações. Seja então $b = f(a)$, $a \in U$, um ponto qualquer de $f(U)$. Como U

é aberto em E, existe um número $r > 0$ tal que $B = B[a;r] \subset U$. Afirmamos que a bola aberta de centro b e raio $(1-c)r$ está contida em $f(U)$. Ou seja, dado $y \in E$ tal que $|y - b| < (1-c)r$, devemos mostrar que a equação $f(x) = y$ possui uma solução $x \in U$. Para isto, consideramos a contração $\xi_y \colon B \to E$, definida por $\xi_y(x) = y - \varphi(x)$. É imediato que $f(x) = y \Leftrightarrow \xi_y(x) = x$. Como a bola fechada $B = B[a;r]$ é completa, basta verificar que $\xi_y(B) \subset B$. Ora,

$$|a - \xi_y(a)| = |a + \varphi(a) - y| = |y - f(a)| = |y - b| < (1-c) \cdot r.$$

Logo B é invariante por ξ_y, em virtude da Proposição 24.

Exemplo 37. O método das aproximações sucessivas pode ser usado para provar a existência e a unicidade de solução de um sistema de equações diferenciais ordinárias. Neste problema, são dados um aberto $U \subset \mathbb{R} \times E$, onde E é um espaço de Banach, e uma aplicação contínua $f \colon U \to E$, cumprindo a condição de Lipschitz $|f(t,x) - f(t,y)| \leq c \cdot |x - y|$, onde a constante c não depende dos pontos (t,x) e (t,y) em U. É dado ainda um ponto $(t_0, x_0) \in U$ e procura-se uma aplicação diferenciável $\varphi \colon I \to E$, definida num intervalo I que contenha t_0 no seu interior, tal que $\varphi(t_0) = x_0$ e, para todo $t \in I$, $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$. (Esta última igualdade implica, em particular, que φ é continuamente derivável e seu gráfico está contido em U.)

Para obter φ, começamos observando que as duas condições $\varphi(t_0) = x_0$ e $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ para todo $t \in I$, podem ser englobadas numa única condição: para todo $t \in I$, deve-se ter

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds,$$

conforme o Teorema Fundamental do Cálculo.

Em seguida, tomamos o intervalo $I = (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$ e a bola fechada $B = B[x_0, \beta]$ em E, onde $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ cumprem: 1º) $I \times B \subset U$; 2º) $|f(t,x)| \leq M$ para todo $(t,x) \in I \times B$; 3º) $\alpha \cdot M \leq \beta$ e $\alpha \cdot c < 1$. [A primeira destas condições pode ser cumprida porque U é aberto; a segunda porque f, sendo contínua, é limitada numa vizinhança de (x_0, t_0); para cumprir as condições 3º), basta tomar α suficientemente pequeno.]

Depois disto, consideramos o espaço métrico $\mathcal{C}(I;B)$, formado pelas aplicações contínuas $\varphi\colon I\to B$, com a métrica da convergência uniforme, e definimos a aplicação $F\colon \mathcal{C}(I;B)\to\mathcal{C}(I;B)$, pondo:

$$[F(\varphi)](t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))\,ds,$$

para toda $\varphi\in\mathcal{C}(I;B)$ e todo $t\in I$.

Há alguns pontos a verificar: em primeiro lugar, que $[F(\varphi)](t)\in B$ para toda $\varphi\in\mathcal{C}(I;B)$ e todo $t\in I$. Com efeito,

$$|[F(\varphi)](t)-x_0| = \left|\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))\,ds\right| \le |t-t_0|\cdot M \le \alpha\cdot M\le\beta.$$

Além disso, dados $t,t'\in I$ quaisquer, vale

$$|F(\varphi)(t)-F(\varphi)(t')| = \left|\int_{t}^{t'} f(s,\varphi(s))\,ds\right| \le |t-t'|\cdot M,$$

de modo que $F(\varphi)$ é lipschitziana. Em particular, temos $F(\varphi)\in\mathcal{C}(I;B)$ para toda $\varphi\in\mathcal{C}(I;B)$. Temos portanto o direito de escrever que F é uma aplicação do espaço métrico completo $\mathcal{C}(I;B)$ em si mesmo.

Finalmente, se tomarmos $k=\alpha\cdot c$, veremos que $0<k<1$ e que, para $\varphi,\psi\in\mathcal{C}(I;B)$ quaisquer, vale

$$\begin{aligned}||F(\varphi)-F(\psi)|| &= \sup_{t\in I}\left|\int_{t_0}^{t}[f(s,\varphi(s))-f(s,\psi(s))]ds\right| \le\\ &\le \alpha\cdot\sup_{s\in I}|f(s,\varphi(s))-f(s,\psi(s))|\le\\ &\le \alpha\cdot c\cdot\sup_{s\in I}|\varphi(s)-\psi(s)|\le\\ &\le \alpha\cdot c\cdot||\varphi-\psi|| = k\cdot||\varphi-\psi||.\end{aligned}$$

Logo F é uma contração do espaço métrico completo $\mathcal{C}(I;B)$ em si mesmo. Existe portanto uma única aplicação contínua $\varphi\colon I\to B$ tal que $F(\varphi)=\varphi$, ou seja $\varphi(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))\,ds$, o que é equivalente a dizer que $\varphi(t_0)=x_0$ e $\varphi'(t)=f(t,\varphi(t))$ para todo $t\in I$.

Observação. É freqüente que o espaço de Banach E seja o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Neste caso, $f\colon U \to E$ é dada por n funções reais $f_1, \ldots, f_n\colon U \to \mathbb{R}$ e a solução $\varphi\colon I \to \mathbb{R}^n$ consta de n funções $\varphi_1, \ldots, \varphi_n\colon I \to \mathbb{R}$ tais que $d\varphi_i/dt = f_i(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Isto é o que se chama a solução do sistema de n equações diferenciais $dx_i/dt = f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$.

EXERCÍCIOS DO CAPÍTULO 7

§1

1. Seja Σa_n uma série convergente de números reais positivos. Se uma seqüência (x_n) num espaço métrico é tal que $d(x_n, x_{n+1}) \leq a_n$ para todo n então (x_n) é uma seqüência de Cauchy.
2. Dada uma seqüência (x_n) em M, formamos uma seqüência dupla de números reais pondo $t_{mn} = d(x_m, x_n)$. Mostre que (x_n) é de Cauchy se, e somente se, $\lim\limits_{m,n\to\infty} t_{mn} = 0$.
3. Seja $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(n) = \infty$. Se (x_n) é uma seqüência de Cauchy em M então $y_n = x_{\varphi(n)}$ define uma seqüência de Cauchy em M.
4. Dada a seqüência (x_n) no espaço métrico M, considere a seqüência de funções $f_n\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, dadas por $f_n(p) = d(x_n, x_{n+p})$. A seqüência (x_n) é de Cauchy se, e somente se, $f_n \to 0$ uniformemente. Considerando a seqüência das somas parciais da série harmônica, mostre que a condição "$f_n \to 0$ simplesmente" não basta para que (x_n) seja de Cauchy.
5. Sejam E, F, G espaços vetoriais normados e $f\colon E \times F \to G$ bilinear contínua. Se (x_n) e (y_n) são seqüências de Cauchy em E e F respectivamente então $z_n = f(x_n, y_n)$ define uma seqüência de Cauchy em G.
6. Para qualquer espaço métrico M, o conjunto das seqüências de Cauchy é um subconjunto fechado de $\mathcal{B}(\mathbb{N}; M)$. Se E é um espaço vetorial normado, as seqüências de Cauchy em E constituem um subespaço vetorial fechado de $\mathcal{B}(\mathbb{N}; E)$.

§2

7. Se $M_1, \ldots, M_n \subset N$ são completos então $M_1 \cup \cdots \cup M_n$ é completo.
8. As componentes conexas de um espaço métrico completo são subespaços completos.
9. Seja $(M_\lambda)_{\lambda\in L}$ uma família arbitrária de subespaços completos de um espaço métrico N. Então a interseção $M = \bigcap\limits_{\lambda\in L} M_\lambda$ é um espaço métrico completo.

10. Se existe um conjunto X tal que $\mathcal{B}(X; M)$ seja completo, então o espaço métrico M é completo.

11. Seja $f: M \to N$ contínua, tal que existe $c > 0$ com $d(f(x), f(y)) \geq c \cdot d(x, y)$ para quaisquer $x, y \in M$. Mostre que f transforma subespaços completos de M em subespaços completos de N. Em particular, se M é completo então f é uma aplicação fechada.

12. Seja M um espaço métrico completo sem pontos isolados. O conjunto das seqüências convergentes é um fechado com interior vazio em $\mathcal{B}(\mathbb{N}; M)$. Mostre que o mesmo conjunto é denso em $M^{\mathbb{N}} = M \times M \times \cdots \times M \times \ldots$ (métrica produto).

13. Seja M um espaço métrico completo sem pontos isolados. O conjunto das seqüências limitadas divergentes em M é um aberto denso no espaço $\mathcal{B}(\mathbb{N}; M)$.

§3

14. Dado um espaço de Banach E, seja S o espaço vetorial das seqüências $x = (x_n)$ em E tais que a série Σx_n é normalmente convergente. Prove que a norma $||x|| = \Sigma |x_n|$ torna S um espaço de Banach.

15. Mostre que, no espaço vetorial $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, as operações $s: \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ e $m: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, definidas por $s(x, y) = x + y$ e $m(\lambda, x) = \lambda \cdot x$, são contínuas. Mostre também que os abertos da base convencional de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ são convexos.

16. Seja E um espaço de Banach. O conjunto das transformações lineares contínuas $S: E \to E$ que possuem inversa contínua é um aberto em $\mathcal{L}(E; E)$.

17. Seja $\mathcal{C}^1([a, b]; \mathbb{R})$ o espaço vetorial das funções (limitadas) $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ que possuem derivada contínua (e limitada) em todos os pontos de $[a, b]$, com a norma $||f||_1 = \sup\limits_{a \leq x \leq b} (|f(x)| + |f'(x)|)$. Prove que $\mathcal{C}^1([a, b]; \mathbb{R})$ é um espaço de Banach. Para todo $r \in \mathbb{N}$, defina o espaço de Banach $\mathcal{C}^r([a, b]; \mathbb{R})$.

18. Dado o espaço de Banach E, seja U o conjunto das transformações lineares contínuas $S: E \to E$ que possuem uma inversa contínua $S^{-1}: E \to E$. Considerando U como subconjunto do espaço de Banach $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E; E)$, prove que a aplicação $f: U \to U$, dada por $f(S) = S^{-1}$, é contínua. (*Sugestão*: observe que $f(I - T) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} T^n = \Sigma f_n(T)$ é uma série de funções contínuas que converge uniformemente em cada bola $|T| \leq r$, com $0 < r < 1$.)

19. Seja x um vetor não-nulo no espaço de Hilbert H. O complemento ortogonal de x, definido como $E = \{y \in H; \langle x, y \rangle = 0\}$ é um subespaço fechado de codimensão 1 em H. Mostre que x e y possuem o mesmo complemento ortogonal se, e somente se, um é múltiplo do outro.

§4

20. Sejam $M = \mathbb{R} - \{0\}$, $A = \{1, 3\}$ e $f\colon A \to M$ definida por $f(x) = x - 2$. Mostre que f não possui nenhuma extensão contínua $F\colon M \to M$.

21. Sejam $\mathcal{C}_0[a,b]$ o espaço vetorial das funções contínuas (limitadas) $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ e $\mathcal{P}[a,b]$ o subespaço formado pelos polinômios. Admita o Teorema de Weierstrass, segundo o qual $\mathcal{P}[a,b]$ é denso em $\mathcal{C}_0[a,b]$ na métrica da convergência uniforme. Mostre que existe um único funcional linear contínuo $J\colon \mathcal{C}_0[a,b] \to \mathbb{R}$ tal que, para todo monômio x^n, tem-se $J(x^n) = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1})$. Escreve-se $J(f) = \int_a^b f(x)\,dx$.

22. Seja $N \subset M$ um subconjunto próprio que não é uma interseção enumerável de abertos em M. Considerando a aplicação identidade $f\colon N \to N$, conclua que a Proposição 11 seria falsa sem a hipótese de N ser completo.

§5

23. Seja X um subespaço do espaço métrico M. Mostre que o completamento de X contém um subespaço isométrico ao fecho de X em M.

24. O completamento do produto cartesiano $\prod_{i=1}^{\infty} M_i$ é o produto cartesiano $\prod_{i=1}^{\infty} \widehat{M_i}$ dos completamentos $\widehat{M_i}$.

25. Seja $\mathcal{C}$ o conjunto das seqüências de Cauchy no espaço métrico M. Mostre que, se $x = (x_n)$ e $y = (y_n)$ pertencem a $\mathcal{C}$ então existe o número real $\rho(x,y) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$. Mostre que ρ é uma pseudo-métrica em $\mathcal{C}$ e que o espaço métrico associado a $\mathcal{C}$ segundo o processo do §6, Capítulo 1 é um completamento de M.

§6

26. Se a função $f\colon M \to \mathbb{R}$ é limite simples de uma seqüência de funções contínuas $f_n\colon M \to \mathbb{R}$ então, $\forall\, c \in \mathbb{R}$, $f^{-1}([c, +\infty))$ é um G_δ.

27. Se M é topologicamente completo e $E \subset M$ é enumerável então $M - E$ é topologicamente completo.

§7

28. Tem-se $\operatorname{int}(\overline{S}) = \varnothing$ num espaço métrico M se, e somente se, todo aberto não-vazio contém um aberto não-vazio disjunto de S.

29. Seja f uma função monótona definida num intervalo. O fecho do gráfico de f tem interior vazio em $\mathbb{R}^2$. Idem para f contínua.

30. Se o fecho de X tem interior vazio, o mesmo ocorre com ∂X.

31. Sejam $X \subset Y \subset M$. Se X é magro em Y então X é magro em M.

32. Seja A aberto em M. Se X é magro em M então $A \cap X$ é magro em A e $\overline{A} \cap X$ é magro em $\overline{A}$.

33. Seja M um espaço métrico completo. Se, para cada $n \in \mathbb{N}$, X_n é uma interseção enumerável de abertos densos em M então $X = \cap X_n$ é denso em M.

34. Nenhuma norma pode tornar completo o espaço $\mathbb{R}^\infty$ do Exercício 46, Caítulo 1.

35. Sejam E um espaço de Banach e $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}(E;\mathbb{R})$ um conjunto de funcionais lineares contínuos que é pontualmente limitado, isto é, para todo $x \in E$ existe $c_x > 0$ tal que $|f(x)| \leq c_x$ seja qual for $f \in \mathcal{F}$. Mostre que $\mathcal{F}$ é uniformemente limitado, isto é, existe $c > 0$ tal que $|f(x)| \leq c$, sejam quais forem $f \in \mathcal{F}$ e $x \in E$ com $|x| = 1$. (Princípio de Banach-Steinhaus.)

36. Seja Y o conjunto dos números irracionais. Não existe uma função contínua $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(Y) \subset \mathbb{Q}$ e $f(\mathbb{Q}) \subset Y$.

37. Se uma função $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ é limite simples de uma seqüência de funções contínuas $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ então o conjunto dos pontos nos quais f é contínua é não-enumerável.

38. Seja X um subespaço enumerável denso num espaço métrico completo sem pontos isolados. Prove que nenhuma métrica equivalente à de X pode torná-lo um espaço métrico completo.

39. Seja M um espaço métrico completo, conexo e localmente conexo. Se $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ onde os F_n são fechados dois a dois disjuntos então todos os F_n menos um são vazios.

40. Existe uma função contínua $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ que não é localmente lipschitziana em ponto algum.

40a. Nenhum conjunto enumerável gera o espaço vetorial $E = \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R})$.

§8

41. Sejam M um espaço métrico completo $k > 1$ e $f\colon M \to M$ (não necessariamente contínua) sobrejetiva tal que $d(f(x), f(y)) \geq k \cdot d(x,y)$ para quaisquer $x, y \in M$. Prove que existe um único ponto $a \in M$ tal que $f(a) = a$.

42. Sejam M um espaço métrico completo e $f\colon M \to M$ tal que, para um certo $p \in \mathbb{N}$, $f^p = f \circ \cdots \circ f$ (p fatores) é uma contração de M. Então f possui um único ponto fixo $a \in M$, o qual é um ponto fixo "atrator", isto é, $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = a$, para todo $x \in M$.

43. Seja M um espaço métrico completo. Para cada $\alpha\colon M \to M$, seja $\Gamma_\alpha(M)$ o conjunto das contrações $f\colon M \to M$ tais que $d(f, \alpha) < +\infty$. A aplicação $\varphi\colon \Gamma_\alpha(M) \to M$, que associa a cada contração f seu único ponto fixo, é contínua. (Estamos tomando em $\Gamma_\alpha(M)$ a métrica do sup.)

44. A função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \cos(\cos x)$, é uma contração, mas $g(x) = \cos x$ e $h(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$ não são contrações.

45. Seja $\cos\colon [0, \pi/2] \to [0, \pi/2]$ e ponha $\cos^m = \cos \circ \cos \circ \cdots \circ \cos$ (m fatores). Prove que, para todo $x \in [0, \pi/2]$, existe $\lim\limits_{m\to\infty} \cos^m(x) = a$, onde a independe de x.

Capítulo 8

Espaços Métricos Compactos

1 Compacidade na reta

Os três teoremas seguintes são resultados clássicos sobre a Topologia da Reta e obrigatórios em todo curso de Análise.

Teorema 1 (*Bolzano-Weierstrass*). *Todo subconjunto infinito limitado $X \subset \mathbb{R}$ possui um ponto de acumulação.*

Demonstração. Seja $A = \{a \in \mathbb{R}; X \cap (a, +\infty) \text{ é infinito}\}$. Em outras palavras, A é formado pelos pontos $a \in \mathbb{R}$ tais que existem infinitos pontos de X à direita de a. O conjunto A é não-vazio e limitado superiormente: se $X \subset [\alpha, \beta]$ então $\alpha \in A$ e β é cota superior de A. Seja $c = \sup A$. Afirmamos que c é ponto de acumulação do conjunto X. Com efeito, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $a \in A$ tal que $c - \varepsilon < a \leq c$. Logo existem infinitos pontos de X à direita de $c - \varepsilon$. Por outro lado, não há uma infinidade de pontos de X à direita de $c + \varepsilon$. Logo $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \cap X$ é infinito, o que prova o teorema.

Teorema 2. (*Às vezes também chamado de Bolzano-Weierstrass.*) *Toda seqüência limitada de números reais possui uma subseqüência convergente.*

Demonstração. Seja $\alpha \le x_n \le \beta$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Pondo $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$, vemos que $X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_n \supset \dots$ e $X_n \subset [\alpha, \beta]$. Seja $a_n = \inf X_n$. Então $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n \le \cdots \le \beta$. Existe portanto $a = \lim a_n$. Para provar que a é limite de alguma subseqüência de (x_n) mostraremos que, para quaisquer $\varepsilon > 0$ e $n_1 \in \mathbb{N}$, existe $n > n_1$ tal que $x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Com efeito, existe $n_0 > n_1$ tal que $a - \varepsilon < a_{n_0} \le a < a + \varepsilon$, pois $a = \lim a_n$. Como $a_{n_0} = \inf X_{n_0}$, existe $n \ge n_0$ tal que $a_{n_0} \le x_n < a+\varepsilon$. Temos então $n > n_1$ e $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Teorema 3 (*Borel-Lebesgue*). *Seja* $[a, b] \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$, *onde* $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ *é uma família de subconjuntos abertos da reta. Então existem* $\lambda_1, \dots,$ $\lambda_n \in L$ *tais que* $[a, b] \subset A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}$.

Demonstração. A hipótese significa que para cada $t \in [a, b]$ existe algum índice $\lambda \in L$ tal que $t \in A_\lambda$. Seja X o conjunto dos pontos $x \in [a, b]$ tais que o intervalo $[\alpha, x]$ está contido em alguma reunião finita $A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}$. Temos:

$$X = \{x \in [a, b]; \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in L \text{ tais que } [a, x] \subset A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}\}.$$

X é um subconjunto não-vazio de $[a, b]$. De fato, para algum $\lambda \in L$ temos $a \in A_\lambda$. Como A_λ é aberto, existe $\delta > 0$ tal que $a + \delta < b$ e $[a, a + \delta) \subset A_\lambda$. Então $[a, a + \delta) \subset X$. É evidente que se $x \in X$ e $a \le y < x$ então $y \in X$. Logo X é um intervalo, da forma $[a, c]$ ou da forma $[a, c)$, onde $c = \sup X$. Afirmamos que $c \in X$. Com efeito, existe $\lambda_0 \in L$ tal que $c \in A_{\lambda_0}$. Como A_{λ_0} é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subset A_{\lambda_0}$. Pela definição de sup, podemos encontrar $x \in X$, com $c - \varepsilon < x \le c$. Ora, temos

$$[a, x] \subset A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}. \text{ Logo } [a, c] \subset A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n} \cup A_{\lambda_0}.$$

Portanto, $c \in X$. Finalmente, devemos ter $c = b$ porque se fosse $c < b$ poderíamos, neste último raciocínio, ter tomado ε tal que $c + \varepsilon < b$. Então teríamos $[a, c + \varepsilon) \subset X$, contrariando o fato de que $c = \sup X$. Assim, $X = [a, b]$, o que demonstra o teorema.

Teorema 3' (*Forma geral do Teorema de Borel-Lebesgue*). *Seja F um subconjunto fechado e limitado da reta. De toda família $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ de abertos tais que $F \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$, pode-se extrair uma subfamília finita $(A_{\lambda_1}, \ldots, A_{\lambda_n})$ cuja reunião ainda contém F.*

Demonstração. Existe um intervalo $[a, b]$ tal que $F \subset [a, b]$. Seja $A_{\lambda_0} = \mathbb{R} - F$. Então A_{λ_0} é aberto e $[a, b] \subset \big(\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \big) \cup A_{\lambda_0}$. Pelo Teorema 3, existem $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in L$ tais que $[a, b] \subset A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n} \cup A_{\lambda_0}$. Como A_{λ_0} não contém pontos de F, concluímos daí que $F \subset A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}$.

Nosso objetivo, no que se segue, é estudar os espaços métricos nos quais teoremas dos tipos acima são válidos. Entre outras coisas, veremos que são equivalentes as propriedades enunciadas nesses três teoremas, os quais foram apresentados na ordem crescente de importância.

2 Espaços métricos compactos

Seja X um subconjunto de um espaço métrico M. Uma *cobertura* de X é uma família $\mathcal{C} = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos de M tal que $S = \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$. Isto significa que, para cada $x \in X$, existe pelo menos um índice $\lambda \in L$ tal que $x \in C_\lambda$.

Se existe um subconjunto $L' \subset L$ tal que, para cada $x \in X$, ainda se pode obter $\lambda \in L'$ com $x \in C_\lambda$, isto é, $X \subset \bigcup_{\lambda \in L'} C_\lambda$, então a subfamília $\mathcal{C}' = (C_\lambda)_{\lambda \in L'}$ chama-se uma *subcobertura* de $\mathcal{C}$. Quando L' é um subconjunto próprio de L, $\mathcal{C}'$ diz-se uma *subcobertura própria* de $\mathcal{C}$.

Uma cobertura $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ diz-se *aberta* quando cada conjunto A_λ, $\lambda \in L$, é aberto em M. A cobertura $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$ diz-se *finita* quando L é um conjunto finito. Neste caso, temos $L = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ e escrevemos $X \subset C_{\lambda_1} \cup \cdots \cup C_{\lambda_n}$.

Veremos diversos exemplos de cobertura a seguir. Agora vamos definir o conceito central deste capítulo.

Um espaço métrico M chama-se *compacto* quando toda cobertura aberta possui uma subcobertura finita.

Noutros termos, M compacto significa que se $M = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$, onde cada A_λ é aberto em M, então existem $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in L$ tais que $M = A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}$.

Abreviadamente:

$$M = \cup A_\lambda \text{ com cada } A_\lambda \text{ aberto } \Rightarrow M = A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}.$$

Um subconjunto K de um espaço métrico M chama-se um *subconjunto compacto* quando o subespaço métrico K é compacto.

Isto significa que de toda cobertura $X = \bigcup_{\lambda \in L} A'_\lambda$, por meio de abertos A'_λ *em* X se pode extrair uma subcobertura finita $X = A'_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A'_{\lambda_n}$. Como, para cada $\lambda \in L$, $A'_\lambda = X \cap A_\lambda$, onde A_λ é *aberto em* M, vemos que $X = \cup A'_\lambda \Leftrightarrow X \subset \cup A_\lambda$.

Logo, o subconjunto $X \subset M$ é compacto se, e somente se, de cada cobertura $X \subset \cup A_\lambda$, por abertos $A_\lambda \subset M$, se pode extrair uma subcobertura finita $X \subset A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}$.

Como a definição de compacto é formulada em termos dos abertos do espaço, segue-se que a compacidade é um invariante topológico: se M e N são homeomorfos, então M é compacto se, e somente se N o é.

Exemplo 1. Em virtude do Teorema de Borel-Lebesgue, todo subconjunto limitado e fechado da reta é compacto. Em particular, o conjunto de Cantor é compacto. Todo espaço métrico finito é compacto, pois toda sua cobertura contém apenas um número finito de subconjuntos distintos. Por outro lado, se M é um espaço discreto infinito ($\mathbb{N}$, por exemplo) seus pontos constituem uma cobertura aberta infinita que não possui subcobertura própria, logo não se pode extrair dela uma subcobertura finita. Portanto M não é compacto. Também não é compacto um intervalo aberto (a, b). Com efeito, para todo n suficientemente grande, temos $a+1/n < b-1/n$, logo existe o intervalo aberto $A_n = (a + 1/n, b - 1/n)$. Temos $(a, b) = \cup A_n$ mas esta cobertura aberta não admite subcobertura finita. Com efeito, a reunião de uma coleção finita qualquer de conjuntos A_n é igual ao A_n de maior índice na coleção e portanto não é igual a (a, b).

Exemplo 2. Se $K, L \subset M$ são subconjuntos compactos, então $K \cup L$ é compacto. Com efeito, se $K \cup L \subset \cup A_\lambda$ então, em particular, $K \subset \cup A_\lambda$ e $L \subset \cup A_\lambda$, donde $K \subset A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}$ e

$L \subset A_{\lambda_{n+1}} \cup \cdots \cup A_{\lambda_p}$ e portanto $K \cup L \subset A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_p}$. Segue-se que a reunião de um número finito de subconjuntos compactos é compacta. Por outro lado, uma reunião infinita de compactos pode não ser compacta. Com efeito, todo conjunto é reunião de seus pontos, que são compactos.

A noção de espaço compacto pode também ser formulada em termos de conjuntos fechados.

Se $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família de abertos em M, os complementares $F_\lambda = F - A_\lambda$ formam uma família $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos fechados de M. Tem-se $M = \cup A_\lambda \Leftrightarrow \cap F_\lambda = \varnothing$.

Portanto, um espaço métrico M é compacto se, e somente se, toda família $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ de fechados com interseção vazia possui uma subfamília finita com interseção vazia: $F_{\lambda_1} \cap \cdots \cap F_{\lambda_n} = \varnothing$.

Diz-se que uma família $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ goza da *propriedade da interseção finita* quando, para qualquer subconjunto finito $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \subset L$ tem-se $F_{\lambda_1} \cap \cdots \cap F_{\lambda_n} \neq \varnothing$.

A seguinte condição é necessária e suficiente para que um espaço métrico M seja compacto:

Se $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família de fechados com a propriedade da interseção finita, então $\bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda \neq \varnothing$.

Um exemplo de família de fechados com a propriedade da interseção finita é uma seqüência decrescente $F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset \ldots$ de subconjuntos não vazios, fechados em M. Se M é compacto, isto obriga portanto $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \varnothing$. A demonstração abaixo se enquadra nessa ordem de idéias.

Proposição 0 (*Teorema de Dini*). *Se uma seqüência de funções reais contínuas $f_n\colon M \to \mathbb{R}$, definidas num espaço métrico compacto M, converge simplesmente para uma função contínua $f\colon M \to \mathbb{R}$ e, além disso, tem-se $f_1(x) \le f_2(x) \le \cdots \le f_n(x) \le \dots$ para todo $x \in M$ então a convergência $f_n \to f$ é uniforme em M.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, ponhamos, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$F_n = \{x \in M; |f_n(x) - f(x)| \ge \varepsilon\}.$$

Então $F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset \dots$ e cada F_n é fechado em M. Devemos provar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $F_{n_0} = \varnothing$. (Então $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in M$.) Ora, como $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ para todo $x \in M$, segue-se que $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n = \varnothing$. Sendo M compacto, deve-se ter $F_n = \varnothing$ para algum n.

Proposição 1. *Todo subconjunto fechado de um espaço métrico compacto é compacto. Reciprocamente, um subconjunto compacto de qualquer espaço métrico é fechado.*

Demonstração. Sejam M compacto e $F \subset M$ fechado. Dada uma cobertura aberta $F \subset \cup A_\lambda$, obtemos a cobertura aberta $M = (\cup A_\lambda) \cup (M - F)$, da qual extraímos a subcobertura finita $M = A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n} \cup (M - F)$. Como nenhum ponto de F pertence a $M - F$, concluímos daí que $F \subset A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}$. Logo F é compacto. Reciprocamente, seja $K \subset M$ um subconjunto compacto de um espaço métrico arbitrário M. Se K não fosse fechado em M, existiria $x \in \overline{K} - K$. Pondo, para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_n = M - B[x; 1/n]$, teríamos uma cobertura aberta $K \subset \cup A_n$. [De fato, como $\bigcap\limits_{n} B[x; 1/n] = \{x\}$, temos $\cup A_n = M - \{x\} \supset K$ pois $x \notin K$.] Como $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$, a reunião de uma coleção finita de conjuntos A_n é igual ao conjunto de maior índice da coleção. Como $x \in \overline{K}$, cada bola $B[x; 1/n]$ contém algum ponto de K, ou seja, nenhum A_n contém K. Logo a cobertura aberta $K \subset \cup A_n$ não admite subcobertura finita. Isto contradiz a compacidade de K e completa a demonstração.

Corolário 1. *Qualquer interseção $K = \cap K_\lambda$ de compactos $K_\lambda \subset M$ é compacta.*

Com efeito, cada K_λ sendo fechado em M, a interseção K é um subconjunto fechado em M e portanto em cada K_λ. Logo K é compacto.

Corolário 2. *Todo espaço métrico compacto é completo.*

Com efeito, se M é compacto, então M é um subconjunto fechado denso do seu completamento $\widehat{M}$. Logo $M = \widehat{M}$.

Observação. Um espaço métrico compacto (M, d) é completo em relação a *qualquer* métrica equivalente a d, pois $d_1 \sim d \Rightarrow (M, d_1)$ compacto.

Proposição 2. *Todo espaço métrico compacto é limitado.*

Demonstração. Se M é compacto, da cobertura aberta $M = \bigcup_{x \in M} B(x; 1)$ podemos extrair uma subcobertura finita

$$M = B(x_1; 1) \cup \cdots \cup B(x_n; 1),$$

logo M é limitado.

Poderíamos também ter raciocinado indiretamente, assim: fixemos um ponto $a \in M$. Se M fosse ilimitado, para nenhum $n \in \mathbb{N}$ teríamos $M = B(a; n)$. Logo, a cobertura aberta $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(a; n)$ não possuiria subcobertura finita. [Pois a reunião de um número finito qualquer dessas bolas é a bola de maior raio entre elas.]

Exemplo 3. De acordo com as Proposição 1 e 2, um subconjunto compacto em qualquer espaço métrico é sempre limitado e fechado. A recíproca é válida na reta (Borel-Lebesgue) e, mais geralmente, em $\mathbb{R}^n$, como será mostrado no §5 adiante. Mas um subconjunto limitado e fechado, mesmo no espaço de Hilbert ℓ^2, pode não ser compacto. Por exemplo, seja $X = \{e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\} \subset \ell^2$, onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ tem todas as coordenadas nulas exceto a n-ésima, que é igual a 1. Como $m \neq n \Rightarrow |e_m - e_n| = \sqrt{2}$, vemos que X é limitado e uniformemente discreto, donde completo e portanto fechado em ℓ^2. Mas, sendo discreto e infinito, X não é compacto.

Proposição 3. *A imagem de um conjunto compacto por uma aplicação contínua é um conjunto compacto.*

Demonstração. Sejam $f\colon M \to N$ contínua e $K \subset M$ compacto. Dada uma cobertura aberta $f(K) \subset \cup A_\lambda$, obtemos a cobertura aberta $K \subset \bigcup_\lambda f^{-1}(A_\lambda)$, da qual extraímos uma subcobertura finita $K \subset f^{-1}(A_{\lambda_1}) \cup \cdots \cup f^{-1}(A_{\lambda_n})$ e daí $f(K) \subset ff^{-1}(A_{\lambda_1}) \cup \cdots \cup ff^{-1}(A_{\lambda_n}) \subset A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}$. Logo $f(K)$ é compacto.

Corolário 1. *Se M é compacto, toda aplicação contínua $f\colon M \to N$ é fechada, isto é, $F \subset M$ fechado $\Rightarrow f(F) \subset N$ fechado.*

Com efeito, $F \subset M$ fechado $\Rightarrow F$ compacto $\Rightarrow f(F)$ compacto $\Rightarrow f(F)$ fechado em N.

Corolário 2. *Se M é compacto, toda bijeção contínua $f\colon M \to N$ é um homeomorfismo.*

Com efeito, sendo f fechada, sua inversa $g\colon N \to M$ é tal que $F \subset M$ fechado $\Rightarrow g^{-1}(F) = f(F) \subset N$ fechado. Logo, g é contínua.

Corolário 3. *Se M é compacto, então toda aplicação contínua $f\colon M \to N$ é limitada.*

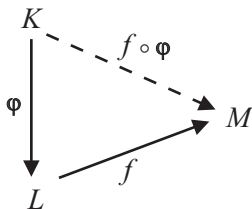
Com efeito, $f(M) \subset N$, sendo compacto, é limitado.

Assim, quando K é compacto, o conjunto $\mathcal{C}(K;N)$ de *todas* as aplicações contínuas $f\colon K \to N$ é um espaço métrico, com a métrica da convergência uniforme.

Exemplo 4. O círculo $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$ é compacto, pois é a imagem, pela aplicação contínua $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, de qualquer intervalo compacto $[a,b]$, com $b - a \geq 2\pi$. Mais geralmente, dado um caminho qualquer $f\colon [a,b] \to M$, sua imagem $f([a,b])$ é um subconjunto compacto de M. Em particular, num espaço vetorial normado E, todo segmento de reta $[x,y] = \{(1-t)x + ty; 0 \leq t \leq 1\}$ é um conjunto compacto, pois é imagem do intervalo $[0,1]$ pela aplicação contínua $t \mapsto (1-t)x + ty$.

Exemplo 5. O Corolário 2 simplifica bastante a verificação de que certas aplicações são homeomorfismos. Por exemplo, num espaço vetorial normado E, se $x \neq y$ então o segmento de reta $[x,y]$ é homeomorfo ao intervalo fechado $[0,1]$ (e portanto a qualquer intervalo $[a,b]$) pois a aplicação contínua $t \mapsto (1-t)x + ty$ é uma

bijeção de $[0,1]$ sobre $[x,y]$. O Corolário 2 também explica por que foi possível dar, no Capítulo 2, exemplos de bijeções contínuas com inversas descontínuas: todas elas tinham domínio não-compacto.

Exemplo 6. Se K é compacto, então toda aplicação contínua sobrejetiva $\varphi\colon K \to L$ é uma *aplicação quociente*. Isto significa que, dado um espaço métrico arbitrário M, uma aplicação $f\colon L \to M$ é contínua se, e somente se, $f\circ\varphi\colon K \to M$ é contínua. É evidente que f contínua $\Rightarrow f\circ\varphi$ contínua. Reciprocamente, se $f\circ\varphi$ é contínua então para todo subconjunto fechado $F \subset M$, temos $(f\circ\varphi)^{-1}(F) = \varphi^{-1}f^{-1}(F) \subset K$ fechado, donde $f^{-1}(F) = \varphi\varphi^{-1}f^{-1}(F)$ é fechado em L. [Como φ é sobrejetiva, $\varphi\varphi^{-1}(X) = X$, para todo $X \subset L$. Além disso, φ é fechada.] Isto mostra que f é contínua.

Mais geralmente, se $\varphi\colon M \to N$ é uma aplicação contínua tal que existe um compacto $K \subset M$ com $\varphi(K) = N$, então φ é uma aplicação quociente. Com efeito, dada $f\colon N \to P$ tal que $f\circ\varphi\colon M \to P$ seja contínua então $(f\circ\varphi)|K = f\circ(\varphi|K)$ é contínua. Como $\varphi|K$ é uma aplicação quociente, isto implica f contínua. Por exemplo, $\varphi\colon \mathbb{R} \to S^1$, $\varphi(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ é uma aplicação quociente, pois $b-a \geq 2\pi \Rightarrow \varphi([a,b]) = S^1$. Desse modo, uma aplicação $f\colon S^1 \Rightarrow M$ é contínua se, e somente se, a aplicação $f\varphi\colon t \mapsto f(\cos t, \operatorname{sen} t)$, de $\mathbb{R}$ em M, é contínua.

Uma aplicação $g\colon \mathbb{R} \to M$ chama-se *periódica* se existe um número $a > 0$ tal que $g(t+a) = g(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. O menor número $a > 0$ com esta propriedade chama-se o *período* de g. Dado $a > 0$, a aplicação $\varphi_a\colon \mathbb{R} \to S^1$, dada por $\varphi_a(t) = (\cos(2\pi/a)t, \operatorname{sen}(2\pi/a)t)$ é uma aplicação quociente. A correspondência $f \mapsto f\varphi_a$ estabelece uma bijeção entre as aplicações contínuas $f\colon S^1 \to M$ e as aplicações contínuas periódicas, de período a, $g = f\varphi_a\colon \mathbb{R} \to M$.

Isto se exprime, resumidamente, dizendo-se que “uma função contínua periódica na reta é o mesmo que uma função contínua no

círculo".

De modo análogo, se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo fechado (de comprimento $a > 0$), a correspondência $f \mapsto f \circ (\varphi_a | I) = g$ dá uma bijeção entre as aplicações contínuas $f \colon S^1 \to M$ e as aplicações contínuas $g \colon I \to M$ que assumem o mesmo valor nas duas extremidades de I.

Proposição 4 (*Weierstrass*). *Se M é compacto, toda função real contínua $f \colon M \to \mathbb{R}$ é limitada e atinge seus valores máximo e mínimo em M. Mais precisamente: existem $x_0, x_1 \in M$ tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para qualquer $x \in M$.*

Demonstração. A imagem $f(M)$ é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$. Logo, é limitado e fechado. Assim, f é limitada e, pondo-se $\alpha = \inf f(M)$, $\beta = \sup f(M)$, temos $\alpha \in f(M)$, $\beta \in f(M)$. Ou seja, existem $x_0, x_1 \in M$ tais que $f(x_0) = \alpha$, $f(x_1) = \beta$. Portanto $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para todo $x \in M$.

Corolário. *Sejam M compacto e $f \colon M \to \mathbb{R}$ contínua, tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in M$. Então existe $c > 0$ tal que $f(x) \geq c$ para todo $x \in M$.*

Exemplo 7. A função $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/(1 + x^2)$, é contínua e $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mas, para todo $c > 0$, é possível obter $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) < c$. Isto ocorre porque $\mathbb{R}$ não é compacto.

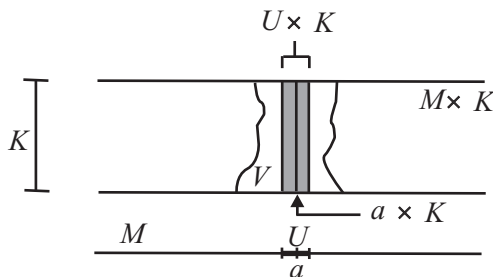
Exemplo 8. Sejam $K, L \subset M$ compactos. A função distância $d \colon K \times L \to \mathbb{R}$ atinge seu mínimo $(= d(K, L))$ num ponto $(a, b) \in K \times L$. Ou seja, existem $a \in K$, $b \in L$ tais que $d(a, b) \leq d(x, y)$ sejam quais forem $x \in K$, $y \in L$. Em particular, se $K \cap L = \varnothing$, temos $0 < c = d(a, b)$ e $d(x, y) \geq c$ para $x \in K$ e $y \in L$ quaisquer. Se $F, G \subset M$ são apenas fechados, podemos ter $d(F, G) = \inf\{d(x, y); x \in F, y \in G\} = 0$, mesmo com $F \cap G = \varnothing$. [Basta tomar $G =$ eixo das abcissas e $F =$ gráfico da função f do exemplo anterior.] Mas se $K \subset M$ é compacto e $F \subset M$ é fechado, com $K \cap F = \varnothing$, então existe $c > 0$ tal que $x \in K$, $y \in F \Rightarrow d(x, y) \geq c$, isto é $d(K, F) > 0$. Com efeito, a função $d_F \colon K \to \mathbb{R}$, dada por $d_F(x) = d(x, F)$ é contínua. (Vide Proposição 3, Capítulo 1.) Como F é fechado, $x \in K \Rightarrow x \notin F \Rightarrow d_F(x) > 0$. Logo, pelo corolário acima, existe $c > 0$ tal que $x \in K \Rightarrow d(x, F) \geq c \Rightarrow d(x, y) \geq c$ para todo $y \in F$.

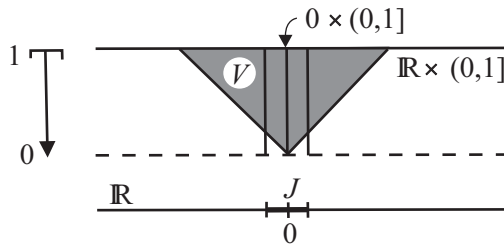
Este fato muitas vezes se usa sob a seguinte forma: se $K \subset V \subset M$ onde K é compacto e V aberto em M, então

$d(K, M - V) > 0$, ou seja, existe $c > 0$ tal que $x \in K$, $y \in M - V \Rightarrow d(x, y) \geq c$.

3 Produtos de dois fatores, um dos quais é compacto

O lema abaixo tem várias conseqüências interessantes. Ele é apresentado aqui porque decorre do Exemplo 8. A leitura deste parágrafo e do seguinte pode, entretanto, ser adiada sem prejuízo para a compreensão do texto.

Lema. *Sejam K, M espaços métricos, K compacto, $a \in M$, $a \times K \subset V \subset M \times K$, onde V é aberto. Existe um aberto U em M tal que $a \times K \subset U \times K \subset V$.*

Demonstração. O conjunto $a \times K$ é homeomorfo a K e portanto é compacto. Existe portanto $r > 0$ tal que $z \in (M \times K) - V$, $t \in K \Rightarrow d(z, (a, t)) \geq r$. Tomemos $U = B(a; r)$ em M. Assim, $(x, t) \in U \times K \Rightarrow d(x, a) < r \Rightarrow (x, t) \in V$. Logo, $U \times K \subset V$, como queríamos demonstrar.

Exemplo 9. O lema acima não vale sem a hipótese de K ser compacto. Por exemplo, se $V = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times (0, 1]; y > |y|\}$ então $0 \times (0, 1] \subset V \subset \mathbb{R} \times (0, 1]$, e V é aberto em $\mathbb{R} \times (0, 1]$, mas não existe um intervalo aberto J contendo 0 tal que $J \times (0, 1] \subset V$. Note-se que a distância de $0 \times (0, 1]$ ao complementar de V é zero.

Corolário 1. *Se K é compacto, a projeção $p_1\colon M \times K \to M$ é uma aplicação fechada.*

O leitor pode facilmente verificar que $U \subset M$ e $F \subset M \times K$, então $U \cap p_1(F) = \varnothing \Leftrightarrow (U \times K) \cap F = \varnothing$. Seja então $F \subset M \times K$ fechado. Se $a \in M$ e $a \notin p_1(F)$, pondo $V = (M \times K) - F$, temos $a \times K \subset V$. Pelo lema, existe $U \subset M$ aberto tal que $a \times K \subset U \times K \subset V$, ou seja $a \in U$ e $(U \times K) \cap F = \varnothing$. Logo $U \cap p_1(F) = \varnothing$. O conjunto $p_1(F)$ é, então, fechado em M.

Exemplo 10. A projeção $p_2\colon M \times K \to K$ pode não ser fechada. Basta considerar o subconjunto $F \subset \mathbb{R} \times [0,1]$, gráfico da função contínua $f\colon \mathbb{R} \to [0,1]$, $f(x) = 1/(1+x^2)$. F é fechado mas sua projeção $p_2(F) = (0,1]$ não é fechada em $[0,1]$.

Corolário 2. *Seja K compacto. Uma aplicação $f\colon M \to K$ é contínua se, e somente se, seu gráfico é fechado.*

Seja $G \subset M \times K$ o gráfico de f. Se G é fechado então, pelo Corolário 1, a aplicação injetiva $\varphi\colon G \to M$, dada por $\varphi = p_1|G$, é fechada. Logo $\varphi^{-1}\colon M \to G$, dada por $\varphi^{-1}(x) = (x, f(x))$, é contínua e, por conseguinte, f é contínua.

Exemplo 11. A função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 1/x$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$, tem gráfico fechado em $\mathbb{R}^2$ mas é descontínua.

O lema acima também pode ser usado para demonstrar que se $f\colon M \times K \to N$ é contínua e K é compacto, então $f(x,t)$ é contínua em x, uniformemente em relação a $t \in K$. Mais precisamente:

Proposição 5. *Seja $f\colon M \times K \to N$ contínua, K compacto. Dados $a \in M$ e $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(x,a) < \delta$ em $M \Rightarrow d(f(x,t), f(a,t)) < \varepsilon$ qualquer que seja $t \in K$.*

Demonstração. Seja $V = \{(x,t) \in M \times K; d(f(x,t), f(a,t)) < \varepsilon\}$. É óbvio que $a \times K \subset V$ e, como f é contínua, V é aberto em $M \times K$.

Pelo lema, existe uma bola $B = B(a;\delta)$ em M tal que $B \times K \subset V$, o que demonstra a proposição.

Exemplo 12. Seja M um espaço métrico. A toda função contínua $f\colon M\times[a,b] \to \mathbb{R}$, associaremos uma função $L\cdot f\colon M \to \mathbb{R}$, definida por

$$(L \cdot f)(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt,$$

se $x \in M$. Afirmamos que, para cada $f \in \mathcal{C}(M \times [a,b]);\mathbb{R})$, tem-se $L \cdot f \in \mathcal{C}(M;\mathbb{R})$. Com efeito, sejam dados $a \in M$ e $\varepsilon > 0$. Pela Proposição 5, existe $\delta > 0$ tal que $x \in M$, $d(x,a) < \delta \Rightarrow |f(x,t) - f(a,t)| < \varepsilon/(b-a)$ para todo $t \in [a,b]$. Logo:

$$d(x,a) < \delta \Rightarrow |(L \cdot f)(x) - (L \cdot f)(a)| \leq$$
$$\leq \int_a^b |f(x,t) - f(a,t)|\,dt \leq (b-a) \cdot \sup_{a \leq t \leq b} |f(x,t) - f(a,t)| \leq \varepsilon.$$

Além disso, é claro que se $f\colon M \times [a,b] \to \mathbb{R}$ é limitada então $L \cdot f\colon M \to \mathbb{R}$ é limitada, com $||L \cdot f|| \leq (b-a) \cdot ||f||$. Temos então uma aplicação

$$L\colon \mathcal{C}_0(M \times [a,b];\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_0(M;\mathbb{R}).$$

L é uma transformação linear contínua entre estes espaços de Banach.

A seguir, estabeleceremos uma bijeção natural entre as aplicações contínuas $f\colon M \to \mathcal{C}(K;N)$ e as aplicações contínuas $\widetilde{f}\colon M \times K \to N$, válida para K compacto.

Quando K é um espaço métrico compacto, toda aplicação contínua $f\colon K \to N$ é limitada, de modo que o conjunto $\mathcal{C}(K;N)$, das aplicações contínuas de K em N, é um espaço métrico, onde $d(f,g) = \sup_{t \in K} d(f(t), g(t))$. Se, porém, M e N são espaços métricos quaisquer, então $\mathcal{C}(M;N)$ é uma reunião de espaços métricos disjuntos $\mathcal{C}_\alpha(M;N)$, cada um deles formado por uma aplicação contínua $\alpha\colon M \to N$, junstamente com todas as aplicações contínuas $f\colon M \to N$ tais que $d(\alpha, f) < +\infty$.

Diremos que uma aplicação $T\colon \mathcal{C}(M;N) \to \mathcal{C}(M';N')$ é uma "isometria" quando, para $f, g \in \mathcal{C}(M;N)$ quaisquer, vale $d(f,g) <$

$+\infty \Leftrightarrow d(T \cdot f, T \cdot g) < +\infty$ e, no caso afirmativo, $d(T \cdot f, T \cdot g) = d(f, g)$.

Consideremos agora espaços métricos K, M, N, sendo K compacto. Cada ponto $f \in \mathcal{C}(M; \mathcal{C}(K; N))$ é uma aplicação contínua $f\colon M \to \mathcal{C}(K; N)$, cujo valor num ponto $x \in M$ indicaremos com f_x, em vez de $f(x)$. Assim, para cada $x \in M$, temos $f_x \in \mathcal{C}(K; N)$, ou seja, $f_x\colon K \to N$ é uma aplicação contínua.

A cada $f \in \mathcal{C}(M; \mathcal{C}(K; N))$, associaremos a aplicação $\widetilde{f}\colon M \times K \to N$, definida por $\widetilde{f}(x, t) = f_x(t)$. Afirmamos que $\widetilde{f}$ é contínua.

Com efeito, seja $(x_0, t_0) \in M \times K$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $d(t, t_0) < \delta_1 \Rightarrow d(f_{x_0}(t), f_{x_0}(t_0)) < \varepsilon/2$, pois f_{x_0} é contínua. Além disso como f é contínua, existe $\delta_2 > 0$ tal que $d(x, x_0) < \delta_2 \Rightarrow d(f_x, f_{x_0}) < \varepsilon/2 \Rightarrow d(f_x(t), f_{x_0}(t)) < \varepsilon/2$ para todo $t \in K$. Tomemos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Então $d[(x, t), (x_0, t_0)] = \max\{d(x, x_0), d(t, t_0)\} < \delta$ em $M \times K \Rightarrow d(\widetilde{f}(x, t), \widetilde{f}(x_0, t_0) = d(f_x(t), f_{x_0}(t_0)) \leq d(f_x(t), f_{x_0}(t)) + d(f_{x_0}(t), f_{x_0}(t_0)) < \varepsilon$.

Fica então definida a aplicação canônica

$$T\colon \mathcal{C}(M; \mathcal{C}(K; N)) \to \mathcal{C}(M \times K; N), \quad T \cdot f = \widetilde{f}.$$

Evidentemente, T é injetiva. Além disso, dada qualquer aplicação contínua $g\colon M \times K \to N$, consideramos, para cada $x \in M$, a aplicação $f_x\colon K \to N$, dada por $f_x(t) = g(x, t)$. Evidentemente, cada f_x é contínua, logo $x \mapsto f_x$ define uma aplicação $f\colon M \to \mathcal{C}(K; N)$, tal que $\widetilde{f} = g$. Resta provar que f é contínua. Ou seja, dados $a \in M$ e $\varepsilon > 0$, devemos achar $\delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f_x, f_a) = \sup_{t \in K} d(f_x(t), f_a(t)) \leq \varepsilon$, isto é, $d(x, a) < \delta \Rightarrow d(g(x, t), d(g(a, t)) \leq \varepsilon$ para todo $t \in K$. Isto porém é a Proposição 5.

Proposição 6. *Se K é compacato, a bijeção*

$$T\colon \mathcal{C}(M; \mathcal{C}(K; N)) \to \mathcal{C}(M \times K; N)$$

é uma "isometria".

Demonstração. Basta observar que, para $f, g \in \mathcal{C}(M; \mathcal{C}(K; N))$

quaisquer,

$$d(T \cdot f, T \cdot g) = \sup_{\substack{x \in M \\ t \in K}} d(\widetilde{f}(x,t), \widetilde{g}(x,t)) =$$

$$= \sup_{x \in M} [\sup_{t \in K} d(f_x(t), g_x(t))] = \sup_{x \in M} d(f_x, g_x) = d(f,g).$$

Corolário. *Se K e L são compactos, então*

$$T\colon \mathcal{C}(K; \mathcal{C}(L; N)) \to \mathcal{C}(K \times L; N)$$

é uma isometria.

Às vezes se usa a notação $M^K = \mathcal{C}(K; M)$. Então a Proposição 6 diz que $(N^K)^M$ e $N^{K \times M}$ são homeomorfos. Por isso ela é chamada a "lei exponencial".

4 Uma base para $\mathcal{C}(K; M)$

Outra aplicação do Exemplo 8 (ou seja, do Teorema de Weierstrass) consiste em caracterizar a topologia (isto é, os conjuntos abertos) de $\mathcal{C}(K; M)$, quando K é compacto, por meio das vizinhanças de gráficos.

Sabemos que uma coleção $\mathcal{V}$ de partes de um espaço métrico M chama-se uma *base de abertos* de M quando: 1º) Todo $V \in \mathcal{V}$ é aberto em M; 2º) Todo aberto de M é reunião de conjuntos V pertences à coleção $\mathcal{V}$. Para assegurar esta segunda condição, basta mostrar que, para toda bola aberta $B(x; r)$, existe um conjunto $V \in \mathcal{V}$ tal que $x \in V \subset B(x; r)$.

O interesse da noção de base de abertos reside na seguinte observação. Sejam M, N espaços métricos, $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ bases de abertos em M e N respectivamente. A fim de que $f\colon M \to N$ seja contínua num ponto $a \in M$ é necessário que, para cada vizinhança Z de $f(a)$ em N exista um aberto básico $V \in \mathcal{V}$ tal que $a \in V$ e $f(V) \subset Z$, e é suficiente que, para cada aberto básico $W \in \mathcal{W}$ com $f(a) \in W$, exista uma vizinhança X de a em M tal que $f(X) \subset W$.

As bolas de raio $1/n$, $n \in \mathbb{N}$ formam uma base de abertos em todo espaço métrico. Num produto cartesiano $\prod M_i$, os conjuntos da forma $A_1 \times \cdots \times A_n \times \prod_{i>n} M_i$, onde $A_1 \subset M_1, \ldots, A_n \subset M_n$ são abertos, também constituem uma base de abertos.

Sejam então K, M espaços métricos, onde K é compacto. Definiremos uma coleção de abertos $V^* \subset \mathcal{C}(K;M)$, os quais mostraremos que constituem uma base do espaço métrico $\mathcal{C}(K;M)$.

Dada $f \in \mathcal{C}(K;M)$, seja $G(f) \subset K \times M$ o gráfico de f. Sabemos que $G(f)$ é homeomorfo a K e portanto é compacto.

Para cada aberto $V \subset K \times M$, definiremos o conjunto

$$V^* = \{f \in \mathcal{C}(K;M); G(f) \subset V\}.$$

Pode perfeitamente ocorrer que V^* seja vazio, com $V \neq \varnothing$. Basta, por exemplo, que $p_1(V) \neq K$. De qualquer maneira, V^* é *um subconjunto aberto de* $\mathcal{C}(K;M)$.

Com efeito, se $f \in V^*$ então $d(G(f);(K \times M) - V) = r > 0$. Logo $d(f,g) < r \Rightarrow d[(t,f(t)),(t,g(t))] = d(f(t),g(t)) < r \Rightarrow (t,g(t)) \in V$ para todo $t \in K \Rightarrow G(g) \subset V \Rightarrow g \in V^*$. Ou seja $f \in V^* \Rightarrow B(f;r) \subset V^*$.

Além disso, dada qualquer bola aberta $B(f;r)$ em $\mathcal{C}(K;M)$, o conjunto $V = \{(t,y) \in K \times M; d(f(t),y) < r/2\}$ é aberto em $K \times M$, pois f é contínua. Ora, $g \in V^* \Rightarrow G(g) \subset V \Rightarrow d(f(t),g(t)) < r/2$ para todo $t \in K \Rightarrow d(f,g) < r \Rightarrow g \in B(f;r)$. Logo $f \in V^* \subset B(f;r)$.

Isto conclui a verificação de que a coleção $\mathcal{V}^*$ dos abertos V^* acima definidos é uma base de abertos para $\mathcal{C}(K;M)$.

Uma conseqüência importante deste fato é que, quando K é compacto, a topologia de $\mathcal{C}(K;M)$ depende apenas das topologias de K e de M mas não das métricas particulares usadas para defini-las. Em outras palavras, se os espaços métricos compactos K e K_1 são homeomorfos, e também são homeomorfos os espaços métricos M e M_1, então $\mathcal{C}(K;M)$ é homeomorfo a $\mathcal{C}(K_1;M_1)$. (Compare com o Item 28 do Capítulo 6.)

5 Caracterizações de espaços compactos

Há algum tempo atrás, a demonstração mais popular do Teorema de Borel-Lebesgue usava um método de bisseções repetidas, que operava assim:

Se $[a,b] \subset \cup A_\lambda$ fosse uma cobertura aberta que não admitisse subcobertura finita, dividindo $[a,b]$ ao meio, em pelo menos

uma das metades, a qual chamaríamos $[a_1, b_1]$, a cobertura aberta $[a_1, b_1] \subset \cup A_\lambda$ não admitiria subcobertura finita. Prosseguindo desta maneira, obteríamos uma seqüência de intervalos $[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$, com $b_n - a_n = (b-a)/2^n$ e, para nenhum n, $[a_n, b_n] \subset \cup A_\lambda$ admite subcobertura finita. Pela Proposição 18, Capítulo 7, existe $c \in [a, b]$ tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{c\}$. Ora, para algum λ deve-se ter $c \in A_\lambda$. Como A_λ é aberto, para todo n suficientemente grande, temos $c \in [a_n, b_n] \subset A_\lambda$. Assim $[a_n, b_n]$ pode ser coberto por um único A_λ, o que nos dá uma contradição.

Este interessante argumento de bisseção deu origem a duas coisas.

A primeira foi uma piada sobre como caçar um leão no deserto, a qual serve apenas para mostrar que tipo de senso de humor têm os matemáticos.

A segunda foi a noção de espaço métrico totalmente limitado.

Um espaço métrico M chama-se *totalmente limitado* quando, para todo $\varepsilon > 0$, pode-se obter uma decomposição $M = X_1 \cup \cdots \cup X_n$, de M como reunião de um número finito de subconjuntos, cada um dos quais tem diâmetro menor do que ε.

A fim de que M seja totalmente limitado, é necessário e suficiente que, para todo $\varepsilon > 0$, se possa escrever $M = B(x_1; \varepsilon) \cup \cdots \cup B(x_n; \varepsilon)$ como reunião de um número finito de bolas abertas de raio ε. Com efeito, se diam $X_i < \varepsilon$ então X_i está contido numa bola aberta de raio ε (e centro num ponto qualquer de X_i). Reciprocamente, toda bola $B(x_i; \varepsilon/3)$ tem diâmetro $< \varepsilon$.

Dito de outra maneira, um espaço métrico M é totalmente limitado se, e somente se, dado qualquer $\varepsilon > 0$ existe um número finito de pontos $x_1, \ldots, x_n \in M$ tais que todo ponto $x \in M$ dista menos de ε de algum dos x_i.

Todo subespaço de um espaço métrico totalmente limitado ainda é totalmente limitado.

Se M é totalmente limitado então M é, em particular, limitado.

Exemplo 13. Se $X \subset \mathbb{R}$ é limitado então X é totalmente limitado. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$ tomamos $0 < \delta < \varepsilon$ e exprimimos a reta como reunião dos intervalos $I_n = [n \cdot \delta, (n+1)\delta]$, todos de comprimento δ. Sendo limitado, X está contido numa reunião finita desses intervalos. Analogamente, decompondo $\mathbb{R}^n$ como reunião

de pequenos paralelepípedos $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, (mediante decomposição de cada eixo em pequenos intervalos) vemos que todo subconjunto limitado de $\mathbb{R}^n$ é totalmente limitado.

Exemplo 14. No espaço de Hilbert ℓ^2, seja $X = \{e_1, \ldots, e_n, \ldots\}$ onde $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$. Todo subconjunto não-vazio de X com diâmetro menor do que $\sqrt{2}$ reduz-se a um único ponto. Logo, se $\varepsilon < \sqrt{2}$, não se pode decompor X como reunião de um número finito de subconjuntos, todos com diâmetro $< \varepsilon$. Assim, X não é totalmente limitado. Segue-se que nenhum conjunto contendo X é totalmente limitado. Em particular, não é totalmente limitada a bola unitária fechada $B[0; 1] \subset \ell^2$.

Observação. Quando M é totalmente limitado, na decomposição $M = X_1 \cup \cdots \cup X_n$ podemos, se for conveniente, supor cada X_i fechado, pois $\operatorname{diam} \overline{X}_i = \operatorname{diam} X_i$. Do mesmo modo se vê que um subconjunto $X \subset M$ é totalmente limitado então seu fecho $\overline{X}$ também o é. Em particular, um espaço métrico M é totalmente limitado se, e somente se, seu completamento $\widehat{M}$ o é.

Proposição 7. *As seguintes afirmações a respeito de um espaço métrico M são equivalentes:*

1) *M é compacto;*

2) *Todo subconjunto infinito de M possui um ponto de acumulação;*

3) *Toda seqüência em M possui uma subseqüência convergente;*

4) *M é completo e totalmente limitado.*

Demonstração. Provemos que 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 1).

1) $\Rightarrow$ 2). Suponhamos M compacto, e seja $X \subset M$ um subconjunto sem ponto de acumulação, isto é, $X' = \varnothing$. Então $\overline{X} = X \cup X' = X$, isto é, X é fechado em M, donde compacto. Além disso, como nenhum $x \in X$ é ponto de acumulação, X é discreto. Segue-se do Exemplo 1 que X é finito.

2) $\Rightarrow$ 3). Dada uma seqüência (x_n) em M, se o conjunto dos valores x_n é finito então existe algum valor $a = x_{n_1} = x_{n_2} = \cdots = x_{n_k} = \ldots$ que se repete infinitas vezes e portanto a subseqüência (x_{n_k}) trivialmente convergente para a. Se, porém, o conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ é infinito então possui um ponto de acumulação a. Toda bola de centro a contém termos x_n com índices

arbitrariamente grandes, logo a é limite de alguma subseqüência de (x_n).

3) $\Rightarrow$ 4). Supondo 3), toda seqüência de Cauchy em M possui uma subseqüência convergente, logo é convergente. Assim, M é completo. Mostremos agora que, para todo $\varepsilon > 0$ dado, podemos exprimir M como reunião de um número finito de bolas de raio ε. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, escolhamos um ponto $x_1 \in M$. Se for $M = B(x_1;\varepsilon)$, o resultado está provado. Caso contrário, existe $x_2 \in M$ tal que $d(x_2, x_1) \geq \varepsilon$. Se for $M = B(x_1;\varepsilon) \cup B(x_2;\varepsilon)$, acabou. Caso contrário, existe $x_3 \in M$, com $d(x_3, x_2) \geq \varepsilon$, $d(x_3, x_1) \geq \varepsilon$. Prosseguindo assim, ou chegamos a um n tal que $M = B(x_1;\varepsilon) \cup \cdots \cup B(x_n;\varepsilon)$ ou então obtemos uma seqüência (x_n) tal que $d(x_m, x_n) \geq \varepsilon$ para $m \neq n$ quaisquer. Neste caso, nenhuma subseqüência de (x_n) seria de Cauchy, e muito menos convergente. Logo, isto não ocorre, e M é totalmente limitado.

4) $\Rightarrow$ 1). Seja M completo e totalmente limitado. Por absurdo, suponhamos que exista uma cobertura aberta $M = \cup A_\lambda$, a qual não possui subcobertura finita. Escrevamos M como reunião de um número finito de subconjuntos fechados, cada um com diâmetro < 1. Pelo menos um deles – que chamaremos X_1 – é tal que $X_1 \subset \cup A_\lambda$ não admite subcobertura finita. X_1 também é totalmente limitado, logo pode ser expresso como reunião finita de subconjuntos fechados, cada um com diâmetro $< 1/2$. Ao menos um desses conjuntos, digamos X_2, não pode ser coberto por um número finito dos A_λ. Prosseguindo dessa maneira, obtemos uma seqüência $X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_n \supset \ldots$ de subconjuntos fechados de M, tais que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{diam} X_n < 1/n$ e X_n não está contido numa reunião finita dos A_λ's. Em particular, nenhum X_n é vazio. Pela Proposição 18, Capítulo 7, existe $a \in M$ tal que $\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$. Para algum λ, tem-se $a \in A_\lambda$. Sendo A_λ aberto, deve-se ter $B(a;1/n) \subset A_\lambda$ para algum n. Como $a \in X_n$ e $\operatorname{diam} X_n < 1/n$, concluímos que $X_n \subset B(a;1/n)$, donde $X_n \subset A_\lambda$, o que é uma contradição.

Corolário 1. *Um espaço métrico é totalmente limitado se, e somente se, seu completamento é compacto.*

Com efeito, M totalmente limitado $\Leftrightarrow \widehat{M}$ totalmente limitado

(e completo) $\Leftrightarrow \widehat{M}$ compacto.

Corolário 2. *Um subconjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto se, e somente se, é limitado e fechado.*

Com efeito $K \subset \mathbb{R}^n$ limitado e fechado $\Leftrightarrow$ K totalmente limitado e completo. (Vide Exemplo 13.) $\Leftrightarrow$ K compacto.

Corolário 2'. *Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ tem fecho compacto se, e somente se, é limitado.*

Corolário 3. *Todo espaço métrico compacto M contém um subconjunto enumerável denso.*

Isto decorre do fato de M ser totalmente limitado. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um subconjunto finito $F_n \subset M$ tal que $d(x, F_n) < 1/n$, para todo $x \in M$. Seja $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Então F é enumerável e, para todo $x \in M$, temos $d(x, F) = 0$. Logo F é denso em M.

Diz-se que um espaço é *seqüencialmente compacto* quando toda seqüência de pontos nele contida possui uma subseqüência convergente. A Proposição 7 diz que um espaço métrico é seqüencialmente compacto se, e somente se, é compacto.

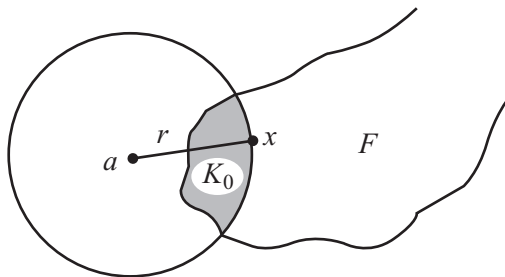
Exemplo 15. A esfera unitária $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \langle x, x\rangle = 1\}$ é compacta. O mesmo se dá com a bola fechada unitária $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq 1\}$. Já no espaço de Hilbert ℓ^2, a esfera unitária $S = \{x \in \ell^2; \langle x, x\rangle = 1\}$ e a bola fechada unitária $B = \{x \in \ell^2; |x| \leq 1\}$ não são compactas, seja porque não são totalmente limitadas, seja porque o subconjunto infinito $\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\} \subset S \subset B$ não possui ponto de acumulação.

Exemplo 16. Se um espaço métrico M não é compacto então existe uma função contínua ilimitada $f\colon M \to \mathbb{R}$. De fato, pela Proposição 7, existe um subconjunto (que podemos supor enumerável) $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \subset M$, sem pontos de acumulação. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $D_n = B[x_n; s_n]$. O leitor pode verificar (como exercício) que as afirmações seguintes são verdadeiras:

1) É possível escolher os números s_n de modo que as bolas fechadas D_n sejam duas a duas disjuntas e $0 < s_n < 1/n$ para cada n.
2) $D = \cup D_n$ é fechado em M.

3) Definindo-se $f\colon M \to \mathbb{R}$ por $f(x) = 0$ se $x \notin D$ e $f(x) = \frac{n}{s_n}[s_n - d(x, x_n)]$, se $x \in D_n$, obtemos uma função contínua tal que $f(x_n) = n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Então $f\colon M \to \mathbb{R}$ é contínua e ilimitada.

Exemplo 17. Sejam $a \in \mathbb{R}^n$ e $F \subset \mathbb{R}^n$ fechado não-vazio. Então existe $x_0 \in F$ tal que $d(a, F) = d(a, x_0)$. Com efeito, tomemos um ponto $x \in F$ e observemos que, se $r = d(a, x)$ então $K_0 = B[a; r] \cap F$ é fechado no compacto $B[a; r]$ e portanto é compacto. Além disso, é claro que

$$d(a; F) = \inf_{y \in F} d(a, y) = \inf_{y \in K_0} d(a, y) = d(a; K_0)$$

pois os pontos de F que não pertencem a K_0 estão, por definição, mais longe de a do que qualquer ponto de K_0. Pelo Teorema de Weierstrass, a função $y \mapsto d(a, y)$, $y \in K_0$, assume seu mínimo num ponto $x_0 \in K_0$. Notemos que o resultado análogo é falso em ℓ^2, como se vê tomando $a = (0, 0, \ldots, 0, \ldots)$ e $F = \{(1 + 1/n)e_n; n \in \mathbb{N}\} \subset \ell^2$. Entretanto, se tomássemos F *convexo* e fechado em ℓ^2, para cada $a \in \ell^2$ existiria $x_0 \in F$ tal que $d(a, F) = d(a, x_0)$. (Vide qualquer texto sobre Espaços de Hilbert.)

Exemplo 18 (*O Teorema Fundamental da Álgebra*). Este teorema diz que todo polinômio $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, com $n > 0$ e $a_n \neq 0$, possui uma raiz no corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos, o qual identificaremos no plano $\mathbb{R}^2$ pela isometria $x + iy \mapsto (x, y)$.

Dado p, observamos em primeiro lugar que $\lim\limits_{z \to \infty} p(z) = \infty$. Isto significa que, para todo $k > 0$ dado, pode-se achar $r > 0$ tal que $|z| > r \Rightarrow |p(z)| > k$. [A demonstração consiste em escrever

$$p(z) = z^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}\right).$$

Para valores muito grandes de z, o fator dentro do parênteses é praticamente igual a a_n , que é $\neq 0$. Logo podemos tornar $|p(z)|$ tão grande quanto desejemos tomando $|z|$ grande.] Por exemplo, existe $r > 0$ tal que $|z| > r \Rightarrow |p(z)| > |a_0| = |p(0)|$. Seja z_0 o ponto do disco compacto $B[0; r]$, no qual a função contínua $z \mapsto |p(z)|$ assume seu valor mínimo. Assim $|z| \leq r \Rightarrow |p(z)| \geq |p(z_0)|$. Como $|z| > r \Rightarrow |p(z)| > |p(0)|$, concluímos que $|p(z_0)| \leq |p(z)|$ para todo $z \in \mathbb{C}$, isto é, $|p| \colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ assume seu valor mínimo em $\mathbb{C}$ no ponto z_0 , embora $\mathbb{C}$ não seja compacto.

Afirmamos que $p(z_0) = 0$.

Com efeito, suponhamos, por absurdo, que fosse $p(z_0) = c \neq 0$. Escrevamos $q(z) = p(z + z_0)$, donde $p(z_0) = q(0) = c$ e $q(z) = c + z^j|a + r(z)|$, com $a \neq 0$ e $r(0) = 0$. Vamos achar z tal que $|q(z)| < |c|$, o que nos dará uma contradição.

Seja b uma raiz j-ésima de $-c/a$, donde $b^j = -c/a$. Então $b^j a = -c$, logo

$$q(tb) = (1 - t^j)c + t^j b^j r(tb).$$

Como $r(0) = 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $0 < t < \varepsilon$ implica $|r(tb)/a| < 1/2$, logo $|b^j r(tb)| < |c|/2$. Assim,

$$\begin{aligned} 0 < t < \varepsilon < 1 \Rightarrow |q(tb)| &\leq (1 - t^j)|c| + (t^j/2)|c| \\ \Rightarrow |q(tb)| &\leq (1 - t^j/2)|c| < |c|. \end{aligned}$$

Então $z = (\varepsilon/2)b$ nos dá $|q(z)| < |c|$ e conclui a demonstração.

6 Produtos cartesianos de espaços compactos

Proposição 8. *O produto cartesiano de dois espaços métricos compactos é um espaço métrico compacto.*

Demonstração. Sejam M, N espaços métricos compactos. Dada arbitrariamente uma seqüência de pontos $z_n = (x_n, y_n) \in M \times N$, a seqüência das primeiras coordenadas $x_n \in M$ possui uma subseqüência convergente, isto é, existem $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$ infinito e $a \in M$ tais que $\lim\limits_{n \in \mathbb{N}_1} x_n = a$. Por sua vez, a seqüência $(y_n)_{n \in \mathbb{N}_1}$ em N possui também uma subseqüência convergente, isto é, existem $\mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1$

infinito e $b \in N$ tais que $\lim_{n\in\mathbb{N}_2} y_n = b$. É claro que $\lim_{n\in\mathbb{N}_2} x_n = a$. Logo $\lim_{n\in\mathbb{N}_2} z_n = (a, b)$ em $M \times N$. Portanto $M \times N$ é (sequencialmente) compacto.

Corolário. *Se $M_1, \ldots, M_n$ são espaços métricos compactos, então $M_1 \times \cdots \times M_n$ é compacto.*

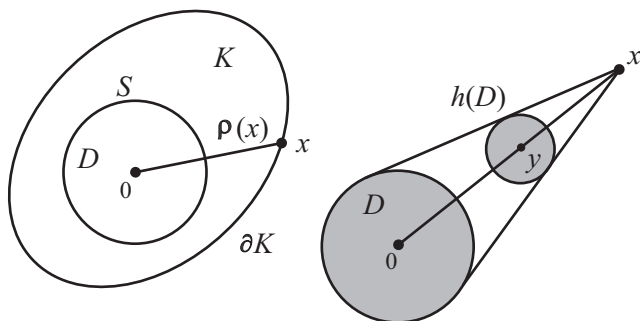
Exemplo 19. O espaço métrico $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ (n fatores) é chamado o *toro n-dimensional.* Ele é compacto, em virtude do corolário acima ou então por ser a imagem de $[0, 2\pi]\times \ldots, \times[0, 2\pi]$ – que já sabíamos ser compacto – pela aplicação contínua $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (e^{ix_1}, \ldots, e^{ix_n})$.

Exemplo 20. *Se $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto, convexo e tem interior não-vazio, então K é homeomorfo a uma bola fechada $D \subset \mathbb{R}^n$.*

Começamos estabelecendo um homeomorfismo $\rho\colon \partial K \to S$ entre a fronteira de K e uma esfera S em $\mathbb{R}^n$. Para simplificar a notação, vamos admitir que $0 \in \operatorname{int} K$. (Isto se consegue por translação.) Sejam $D = B[0; \varepsilon]$ uma bola fechada de centro 0 contida em K e $S = S(0; \varepsilon)$ a fronteira de D.

Definimos $\rho\colon \partial K \to S$ pondo $\rho(x) = \varepsilon \cdot x/|x|$. Evidentemente, ρ é uma aplicação contínua de ∂K em S.

Para cada $x \in \partial K$, $\rho(x)$ é o ponto onde a semi-reta que sai de zero e contém x corta a esfera S. Para cada $u \in S$, como K é limitado e a semi-reta $\vec{0u}$ é ilimitada, existem nela pontos que não pertencem a K. Como a semi-reta $\vec{0u}$ é um conjunto conexo, segue-se do Teorema da Alfândega (Proposição 9, Capítulo 4) que $\vec{0u}$ contém algum ponto x da fronteira de K, ou seja, $\rho(x) = u$. Isto mostra que $\rho\colon K \to S$ é sobrejetiva.

Afirmamos que ρ é injetiva. Com efeito, suponhamos que existissem $x, y \in \partial K$, com $x \neq y$ e $\rho(x) = \rho(y)$. Então x e y pertenceriam à mesma semi-reta. Escolhendo a notação de modo que seja $y \in [0, x]$, temos $y = (1 - \lambda)x$, com $0 < \lambda < 1$. A aplicação $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definida por $h(z) = x + \lambda(z - x)$, é um homeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ (homotetia de centro x e razão λ), tal que $h(0) = y$. Como K é convexo e $h(z) = (1 - \lambda)x + \lambda z$, vemos que $h(K) \subset K$. Segue-se que $h(D)$ é uma vizinhança de y, contida em K, o que contradiz ser $y \in \partial K$.

Assim $\rho\colon \partial K \to S$ é uma bijeção contínua. Como ∂K é um subconjunto fechado do compacto K, e portanto é compacto, segue-se (Corolário 2, Proposição 3) que ρ é um homeomorfismo.

Definamos uma aplicação $f\colon K \to D$ do seguinte modo: $f(0) = 0$ e, se $0 \neq y \in K$ então, como vimos acima, a semi-reta $\vec{0y}$ corta a fronteira ∂K num único ponto x. Temos portanto $y = t \cdot x$, com $t \in (0, 1]$ e $x \in \partial K$ univocamente determinados. Pomos $f(y) = t \cdot \partial(x)$.

Para provar que $f\colon K \to D$, assim definida, é um homeomorfismo, observamos primeiramente que, se $I = [0, 1]$, o produto $I \times \partial K$ é compacto e portanto a sobrejeção contínua $m\colon I{\times}\partial K{\to}K$, dada por $m(t, x) = t \cdot x$, é uma aplicação quociente (Exemplo 6). Ora, $f \circ m\colon I \times \partial K \to D$, dada por $(f \circ m)(t, x) = t \cdot \rho(x)$, é contínua. Logo f é contínua. A verificação de que f é bijetiva é simples. Segue-se que $f\colon K \to D$ é um homeomorfismo.

Proposição 8bis (*Teorema de cantor-Tychonov*). *O produto cartesiano* $M = \prod_{i=1}^{\infty} M_i$ *é compacto se, e somente se, cada fator* M_i $(i = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$ *é compacto.*

Demonstração. Dada uma seqüência arbitrária (x_n) em M, provaremos que ela possui uma subseqüência convergente. Para cada $n \in N$, seja $x_n = (x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{ni}, \ldots)$. Obteremos um subconjunto infinito $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$ tal que, para cada $i = 1, 2, 3, \ldots$ existe $\lim_{n\in\mathbb{N}^*} x_{ni} = a_i \in M_i$. Então, pondo $a = (a_1, a_2, a_3, \ldots) \in M$, teremos $\lim_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = a$. (Vide Corolário da Proposição 16, Capítulo 5.)

Com efeito, sendo M_1 compacto, a seqüência $(x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{n1}, \ldots)$ em M_1 possui uma subseqüência convergente. Isto é, existem $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$ infinito e $a_1 \in M_1$ tais que $\lim_{n\in\mathbb{N}_1} x_{n1} = a_1$. Por sua vez,

sendo M_2 compacto, a seqüência $(x_{n2})_{n\in\mathbb{N}_1}$ possui uma subseqüência convergente, ou seja: existem $\mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1$ infinito e $a_2 \in M_2$ tais que $\lim_{n\in\mathbb{N}_2} x_{n2} = a_2$. Prosseguindo assim, obtemos uma seqüência de conjuntos infinitos $\mathbb{N} \supset \mathbb{N}_1 \supset \cdots \supset \mathbb{N}_i \supset \ldots$ e um ponto $a = (a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots) \in M$, com $\lim_{n\in\mathbb{N}_i} x_{ni} = a_i$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Definimos o conjunto $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$ estipulando que seu i-ésimo elemento (na ordem crescente dos números naturais) seja o i-ésimo elemento de $\mathbb{N}_i$. Assim sendo, para cada $i \in \mathbb{N}$, a seqüência $(x_{ni})_{n\in\mathbb{N}^*}$ é, a partir do seu i-ésimo elemento, uma subseqüência de $(x_{ni})_{n\in\mathbb{N}_i}$. Logo $\lim_{n\in\mathbb{N}^*} x_{ni} = a_i$ para cada i, o que completa a demonstração.

Observação. O método da demonstração acima, devido a Cantor, chama-se "método da diagonal".

Exemplo 21. Um subconjunto $X \subset \ell^2$ chama-se *eqüiconvergente* quando, dado $\varepsilon > 0$ arbitrariamente, pode-se obter $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $x = (x_1, \ldots, x_i, \ldots) \in X$, tem-se $\sum_{i>k} x_i^2 < \varepsilon^2$. É conveniente definir, para cada $k \in \mathbb{N}$, as contrações fracas lineares $P_k \colon \ell^2 \to \mathbb{R}^k$ e $Q_k \colon \ell^2 \to \ell^2$, pondo $P_k(x) = (x_1, \ldots, x_k)$ e $Q_k(x) = (x_{k+1}, \ldots, x_{k+2}, \ldots)$. Então, $X \subset \ell^2$ é eqüiconvergente se, e somente se, para cada $\varepsilon > 0$, existe k tal que $|Q_k(x)| < \varepsilon$, seja qual for $x \in X$.

Afirmamos que um subconjunto $X \subset \ell^2$ é compacto se, e somente se, é limitado, fechado e eqüiconvergente. Com efeito, seja X compacto. Dado $\varepsilon > 0$, existe, para cada $x \in X$, um número $k = k_x \in \mathbb{N}$ tal que $|Q_k(x)| < \varepsilon$. Por continuidade, existe uma bola $B_x = B(x; r_x)$ tal que $y \in B_x \Rightarrow |Q_{k_x}(y)| < \varepsilon$. A cobertura $X \subset \bigcup_{x\in X} B_x$ admite uma subcobertura finita $X \subset B_{x_1} \cup \cdots \cup B_{x_n}$. Seja $k = \max\{k_{x_1}, \ldots, k_{x_n}\}$. Então, para qualquer $x \in X$, temos $|Q_k(x)| < \varepsilon$. Logo, X é eqüiconvergente. É claro que X é também limitado e fechado.

Reciprocamente, suponhamos $X \subset \ell^2$ eqüiconvergente e tomemos uma seqüência de pontos $x_n \in X$ tais que $\lim_n x_{ni} = a_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$.

Afirmamos que $a = (a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots) \in \ell^2$ e que $\lim x_n = a$ em ℓ^2.

Com efeito, em primeiro lugar, (x_n) é de Cauchy em ℓ^2, pois,

dado $\varepsilon > 0$ tomamos $k \in \mathbb{N}$ tal que $|Q_k(x)| < \varepsilon/4$ para todo $x \in X$. Então

$$x, y \in X \Rightarrow |Q_k(x-y)| = |Q_k(x)-Q_k(y)| \leq |Q_k(x)|+|Q_k(y)| < \varepsilon/2.$$

A seqüência de pontos $P_k(x_n) = (x_{n1}, \dots, x_{nk})$ é de Cauchy em $\mathbb{R}^k$. Logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_0 \Rightarrow |P_k(x_m) - P_k(x_n)| = |P_k(x_m - x_n)| < \varepsilon/2.$$

Assim,

$$m, n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| \leq |P_k(x_m - x_n)| + |Q_k(x_m - x_n)| < \varepsilon.$$

Como ℓ^2 é completo, existe $\lim x_n = b$ em ℓ^2. Para cada i, temos $b_i = \lim\limits_n x_{ni} = a_i$. Portanto $b = a = \lim x_n$.

Mostraremos agora que $X \subset \ell^2$ eqüiconvergente, limitado e fechado $\Rightarrow X$ compacto. Primeiro notamos que, para cada $i \in \mathbb{N}$, $p_i(X)$ é limitado, logo existe $J_i = [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}$ tal que $p_i(X) \subset J_i$ para todo i. Seja $j \colon X \to \prod J_i$ a aplicação de inclusão: $j(x) = x$. O que acabamos de ver acima significa que, dada uma seqüência de pontos $x_n \in X$, temos $\lim\limits_n f(x_n) = a$ em $\prod J_i$ se, e somente se, $a \in \ell^2$ e $\lim x_n = a$ em ℓ^2. Sendo $X \subset \ell^2$ fechado, podemos afirmar: $\lim\limits_n f(x_n) = a \in \prod J_i \Leftrightarrow \lim x_n = a \in X$. Isto quer dizer que j é um homeomorfismo de X sobre um subconjunto fechado de $\prod J_i$. Como $\prod j_i$ é compacto, segue-se que X é compacto.

Exemplo 22. O *cubo de Hilbert* é o conjunto C das seqüências de números reais $x = (x_1, \dots, x_i, \dots)$ tais que $0 \leq x_i \leq 1/i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Como a série $\sum \frac{1}{i^2}$ é convergente, vemos que $C \subset \ell^2$. Consideramos C com a métrica induzida de ℓ^2. Para todo $x \in C$, temos $|x|^2 \leq \sum \frac{1}{i^2}$, logo C é limitado. Além disso, considerando as projeções $p_i \colon \ell^2 \to \mathbb{R}$, temos $C = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} p_i^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{i}\right]\right)$, logo C é fechado em ℓ^2. Finalmente, dado $\varepsilon > 0$, se tomarmos $k \in \mathbb{N}$ tal que $\sum\limits_{i>k} \frac{1}{i^2} < \varepsilon^2$, teremos $\sum\limits_{i>k} x_i^2 < \varepsilon^2$ para todo $x \in C$. Logo C é eqüiconvergente. Portanto o cubo de Hilbert C é um subconjunto compacto do espaço ℓ^2.

Em C, a topologia de ℓ^2 coincide com a de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, ou seja, a métrica $d(x,y) = \sqrt{\Sigma(x_i - y_i)^2}$ em C é equivalente à métrica produto $d_1(x,y) = \sum \frac{1}{2^i}|x_i - y_i|$. O cubo de Hilbert C é homeomorfo a $I^{\mathbb{N}}$, onde $I = [0,1]$. Basta definir $h\colon C \to I^{\mathbb{N}}$ pondo $h(x) = (x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)$.

Exemplo 23. (*Curva de Peano*). No término do século 19, o matemático italiano Giuseppe Peano causou grande surpresa ao exibir o primeiro exemplo de uma curva que preenche todos os pontos de um quadrado, isto é, uma sobrejeção contínua $f\colon [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$. Seja $I = [0,1]$. Chama-se hoje *curva de Peano* no espaço métrico M a uma aplicação contínua $f\colon I \to M$ tal que $f(I) = M$. Demonstraremos a seguir a existência de uma curva de Peano no quadrado I^2, mais geralmente, no cubo n-dimensional I^n e mesmo no cubo de Hilbert C, que tem "dimensão infinita". Desempenharão papel importante em nossa construção o conjunto de Cantor K e o produto cartesiano $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$ de uma infinidade enumerável de cópias do espaço discreto $\{0,2\}$. Dividiremos a discussão em etapas, a fim de facilitar o entendimento.

A) *Existe um homeomorfismo* $\varphi\colon \{0,2\}^{\mathbb{N}} \to K$

Antes de definir φ, lembremos que os números reais admitem não somente uma expressão decimal como também, fixado qualquer número $b > 1$, todo número real possui uma *expressão na base* b. Em particular, se $0 \le x \le 1$, a expressão $x = 0, x_1 x_2 \dots x_n \dots$ de x na base b significa que

$$x = \frac{x_1}{b} + \frac{x_2}{b^2} + \cdots + \frac{x_n}{b^n} + \dots$$

onde para cada $n \in \mathbb{N}$, x_n é um inteiro tal que $0 \le x_n < b$. Consideremos, por exemplo, $b = 3$. Se $x \in [0,1]$ tem a expressão $x = 0, x_1 x_2 \dots$ na base 3, cada algarismo x_n pode ser igual a 0, 1 ou 2. O algarismo x_1 diz quantas vezes x contém $1/3$. Assim, $x_1 = 0$ significa que x pertence ao primeiro terço do intervalo $[0,1]$; $x_1 = 1$ quer dizer que x pertence ao terço médio de I e $x_1 = 2$ significa que $x \in [2/3, 1]$. O algarismo x_2 diz quantas vezes $x - x_1/3$ contém $1/9$. Assim, por exemplo, $x = 0,12\dots$ significa que x pertence ao terço médio $[1/3, 2/3]$ e, mais ainda, está no terço final, $[5/9, 2/3]$, deste intervalo. Vemos portanto que o conjunto de Cantor K foi definido

de tal maneira que os seus pontos são exatamente os números $x \in [0,1]$ cuja expressão $x = 0, x_1x_2\dots$ na base 3 contém apenas os algarismos 0 e 2. Definimos então $\varphi\colon \{0,2\}^{\mathbb{N}} \to K$ pondo, para cada seqüência $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ de algarismos zeros e dois,

$$\varphi(x) = 0,\, x_1x_2\dots x_n \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}\cdot$$

Tomamos em $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$ a métrica $d(x,y) = \Sigma|x_n - y_n|/3^n$. Então é claro que φ é contínua, pois $\varphi(x) = d(x,0)$, onde $0=(0,0,\dots,0,\dots)$. A existência de uma expressão na base 3 para todo $x \in K$ mostra que φ é sobrejetiva. Para ver que φ é injetiva, basta lembrar que, assim como a representação decimal de um número real $x \in [0,1]$ é única, exceto por ambigüidades do tipo $0,47999\dots = 0,48000\dots$, também na base 3 os únicos números $x \in I$ que admitem duas expressões distintas são os da forma

$$x = 0,\, x_1 \dots x_{n-1}x_n222\dots = 0,\, x_1\dots x_{n-1}y_n000\dots$$

onde $0 \le x_n < 2$ e $y_n = x_n + 1$. Ora, nestas condições, ou $x_n = 1$ ou $y_n = 1$ e portanto as seqüências distintas $(x_1, \dots, x_n, 2, 2, \dots)$ e $(x_1, \dots, y_n, 0, 0, \dots)$ não pertencem ambas a $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$. Logo φ é uma bijeção contínua do espaço compacto $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$ sobre K e portanto é um homeomorfismo.

Em particular, vemos que, ao contrário do caso finito, o produto cartesiano $\{0,2\} \times \{0,2\} \times \dots$ de infinitas cópias do espaço discreto $\{0,2\}$ não somente não é discreto, como nenhum dos seus pontos é isolado.

Outra conseqüência interessante de A) é que K é homeomorfo a $K \times K$. De fato, existe um homeomorfismo evidente $\xi\colon \{0,2\}^{\mathbb{N}} \to \{0,2\}^{\mathbb{N}} \times \{0,2\}^{\mathbb{N}}$, dado por $\xi(x) = (x', x'')$, onde

$$x=(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \text{ e } x'=(x_1, x_3, x_5, \dots), x''=(x_2, x_4, x_6, \dots).$$

Daí resulta que K é homeomorfo a $K \times (K \times K) = K^3$, etc. Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos K homeomorfo a K^n.

Mais geralmente, temos K homeomorfo a $K^{\mathbb{N}}$. Basta escrever $\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{N}_i$, onde os $\mathbb{N}_i$ são infinitos e dois a dois disjuntos. (Por exemplo $\mathbb{N}_i = \{$números naturais divisíveis por 2^{i-1} mas não por $2^i\}$.

Isto fornece um homeomorfismo $\{0,2\}^{\mathbb{N}} \simeq \{0,2\}^{\mathbb{N}_1} \times \cdots \times \{0,2\}^{\mathbb{N}_i} \times \ldots$, dado por $x \mapsto (x|\mathbb{N}_1, x|\mathbb{N}_2, \ldots)$, portanto um homeomorfismo $K \to K \times K \times \cdots \times K \times \cdots = K^{\mathbb{N}}$.

B) *Existe uma sobrejeção contínua $g\colon K \to I$.*

Basta definir $\psi\colon \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to I$, pondo $\psi(x) = \Sigma x_n/2^n$. Como todo número real $x \in [0,1]$ possui uma expressão na base 2, ψ é sobrejetiva. Além disso, usando em $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ a métrica $d(x,y) = \Sigma|x_n - y_n|/2^n$, vemos que $\psi(x) = d(x,0)$, onde $0 = (0,0,\ldots,0,\ldots)$, logo ψ é contínua. Ora temos os homeomorfismos $\varphi^{-1}\colon K \to \{0,2\}^{\mathbb{N}}$ e $j\colon \{0,2\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (evidente). Tomamos $g = \psi \circ j \circ \varphi^{-1}\colon K \to I$.

Então $(x,y) \mapsto (g(x), g(y))$ define uma sobrejeção contínua

$$g \times g\colon K \times K \to I \times I$$

é, como K é homeomorfo a $K \times K$, obtemos uma sobrejeção contínua $K \to I \times I$.

Mais geralmente, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe uma sobrejeção contínua $K \to I^n$. Finalmente, existe uma sobrejeção contínua $K \to I^{\mathbb{N}}$, ou seja, o cubo de Hilbert C é uma imagem contínua do conjunto de Cantor K.

C) *Seja X um subconjunto convexo de um espaço vetorial normado. Toda aplicação contínua $f_0\colon K \to X$ admite uma extensão contínua $f\colon I \to X$.*

Com efeito, o complemento de K em I é uma reunião de intervalos abertos disjuntos, estando f_0 definida nas extremidades de cada um deles. Para obter a extensão f, basta defini-la em cada um desses intervalos como um caminho retilíneo cujos extremos são dados por f_0.

Para obter uma curva de Peano $f\colon I \to I \times I$, tomamos uma sobrejeção contínua $g\colon K \to I \times I$ e a estendemos continuamente a $f\colon I \to I \times I$. Da mesma maneira, obtemos curvas de Peano $I \to I^n$ e $I \to C$, onde C é o cubo de Hilbert.

7 Continuidade uniforme

Proposição 9. *Se o espaço métrico M é compacto, então toda aplicação contínua $f\colon M \to N$ é uniformemente contínua.*

Demonstração. Se f não fosse uniformemente contínua, existiriam $\varepsilon > 0$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, pontos $x_n, y_n \in M$ tais que $d(x_n, y_n) < 1/n$ e $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$. Passando a uma subseqüência se necessário, podemos supor, em virtude da compacidade de M, que existe $\lim x_n = a \in M$. Então $\lim y_n = a$ também. A continuidade de f e da distância nos dá

$$\lim_{n\to\infty} d(f(x_n), f(y_n)) = d(f(a), f(a)) = 0,$$

em contradição com $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$ para todo n.

Corolário. *Se dois espaços métricos compactos são homeomorfos, então eles são uniformemente homeomorfos. Em particular, duas métricas equivalentes num espaço compacto são uniformemente equivalentes.*

Existe uma versão mais geral da proposição acima que tem utilidade em certas aplicações. A idéia da demonstração é a mesma.

Proposição 9'. *Sejam $f\colon M \to N$ contínua e $K \subset M$ compacto. Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $x \in K$, $y \in M$, $d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.*

Demonstração. Negar a validez da proposição significa admitir a existência de $\varepsilon > 0$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, pontos $x_n \in K$, $y_n \in M$ tais que $d(x_n, y_n) < 1/n$ e $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$. Como K é compacto, passando a uma subseqüência se necessário, podemos supor que $\lim x_n = a \in K$. Sendo $d(x_n, y_n) < 1/n$, temos também $\lim y_n = a$. Logo

$$\varepsilon \leq \lim d(f(x_n), f(y_n)) = d(f(a), f(a)) = 0,$$

uma contradição.

Outra maneira de demonstrar a Proposição 9 consiste em fazer uso da noção de número de Lebesgue de uma cobertura.

Diz-se que um número $\varepsilon > 0$ é *número de Lebesgue* de uma cobertura $M = \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$ quando todo subconjunto $S \subset M$ com diâmetro menor do que ε está contido em algum C_λ da cobertura. Evidentemente, se ε é número de Lebesgue de uma cobertura e $0 < \delta < \varepsilon$, então δ também é número de Lebesgue da mesma cobertura.

Exemplo. Se existirem subconjuntos fechados $F, G \subset M$ com $F \cap G = \varnothing$ e $d(F, G) = 0$ então $M = (M - F) \cup (M - G)$ é uma cobertura aberta de M da qual nenhum número $\varepsilon > 0$ é número de Lebesgue. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, existem $a \in F$, $b \in G$ tais que $d(a, b) < \varepsilon$. Logo $S = \{a, b\}$ é um conjunto com diâmetro inferior a ε, o qual não está contido em nenhum dos dois conjuntos $M - F$ ou $M - G$ da cobertura.

Proposição 10. *Se o espaço métrico M é compacto, então toda cobertura aberta $M = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ possui um número de Lebesgue.*

Demonstração. Supondo, por absurdo, que a cobertura dada não possuísse número de Lebesgue obteríamos, para cada $n \in \mathbb{N}$, um conjunto $S_n \subset M$, com $\operatorname{diam} S_n < 1/n$, tal que nenhum A_λ conteria S_n. Escolhamos em cada S_n um ponto x_n. Passando a uma subseqüência se necessário, podemos admitir que $\lim x_n = a \in M$. Temos $a \in A_\lambda$ para algum $\lambda \in L$. Existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(a; \varepsilon) \subset A_\lambda$. Tomemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < \varepsilon/2$ e $d(a, x_n) < \varepsilon/2$. Então

$$y \in S_n \Rightarrow d(a, y) \leq d(a, x_n) + d(x_n, y) < \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Logo $S_n \subset B(a; \varepsilon) \subset A_\lambda$, uma contradição.

Mostremos agora como se usa a Proposição 10 para provar a Proposição 9.

Outra demonstração da Proposição 9: Sejam M compacto e $f \colon M \to N$ contínua. Dado $\varepsilon > 0$ existe, para cada $x \in M$, uma bola aberta A_x, de centro x, tal que $y \in A_x \Rightarrow d(f(y), f(x)) < \varepsilon/2$. Segue-se da desigualdade triangular que $u, v \in A_x \Rightarrow d(f(u), f(v)) < \varepsilon$. Seja $\delta > 0$ um número de Lebesgue da cobertura $M = \bigcup_{x \in M} A_x$. Então $u, v \in M$, $d(u, v) < \delta \Rightarrow$ existe $x \in M$, com $u, v \in A_x \Rightarrow d(f(u), f(v)) < \varepsilon$. Logo f é uniformemente contínua.

A noção de número de Lebesgue tem aplicações diversas, na Teoria da Dimensão, na Topologia Diferencial, etc.

8 Espaços localmente compactos

Um espaço métrico M chama-se *localmente compacto* quando todo ponto $x \in M$ possui uma vizinhança compacta. Isto significa, naturalmente, que para todo $x \in M$ existe um compacto K, com $x \in \operatorname{int} K$.

A fim de que M seja localmente compacto, é necessário e suficiente que, para todo $x \in M$, exista um aberto A, com $x \in A$ e $\overline{A}$ compacto.

Finalmente, M é localmente compacto se, e somente se, para cada $x \in M$ existe $r > 0$ tal que a bola fechada $B[x;r]$ seja compacta.

Um subconjunto X diz-se localmente compacto quando o subespaço métrico X o for.

Exemplo 24. A reta $\mathbb{R}$ e, mais geralmente, os espaços euclidianos $\mathbb{R}^n$ são localmente compactos. Nestes exemplos, toda bola fechada é compacta. O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais não é localmente compacto pois nenhum intervalo fechado de $\mathbb{Q}$ é compacto. Todo espaço métrico discreto é localmente compacto, pois cada ponto é uma vizinhança compacta de si mesmo. Todo espaço compacto é, em particular, localmente compacto. (Qualquer bola fechada é compacta.) O espaço ℓ^2 não é localmente compacto: nenhuma bola $B[a;r]$ em ℓ^2 pode ser compacta pois a seqüência de pontos $x_n = a + r \cdot e_n$ em $B[a;r]$ é tal que $|x_m - x_n| = r\sqrt{2}$ se $m \neq n$ e portanto não possui subseqüência convergente. [Como sempre, $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$, com 1 no n-ésimo lugar.]

Exemplo 25. Todo subconjunto aberto A de um espaço localmente compacto M é localmente compacto. Com efeito, para todo $a \in A$ existem $r > 0$ e $s > 0$ tais que $B[a;r]$ é compacta e $B[a;s] \subset A$. A menor destas duas bolas é compacta e está contida em A. (Neste exemplo, nem toda bola fechada é compacta. Pense num disco aberto do plano.)

Exemplo 26. Todo subconjunto fechado F de um espaço localmente compacto é localmente compacto. Com efeito, para todo $x \in F$ existe uma bola $B[x;r]$ em M que é compacta. Então $B[x;r] \cap F$ é uma bola fechada em F, a qual, sendo um subconjunto fechado de um compacto, é compacta.

Exemplo 27. Se $X, Y \subset M$ são subconjuntos localmente compactos então $X \cap Y$ é localmente compacto. Com efeito, para cada $x \in X \cap Y$ existem bolas fechadas $B = B[x; r]$ e $B' = B[x; r']$ em M tais que $B \cap X$ e $B' \cap Y$ (que são bolas fechadas em X e Y respectivamente) são compactas. Então a interseção $(B \cap X) \cap (B' \cap Y) = (B \cap B') \cap (X \cap Y)$, que é uma bola fechada em $X \cap Y$, é compacta. Em particular, se M é localmente compacto, $A \subset M$ é aberto e $F \subset M$ é fechado, então $A \cap F$ é localmente compacto. (Também se chega a esta conclusão notando que $A \cap F$ é fechado em A, ou então aberto em F.) Observe-se, porém, que a reunião de dois subconjuntos localmente compactos pode não ser localmente compacta: tome $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$ (semiplano superior aberto) e $p = (0, 0)$. Então $Y = X \cup \{p\}$ não é localmente compacto porque nenhuma bola de centro p em Y é compacta. O leitor verificará que $Z = \mathbb{R}^2 - Y$ é localmente compacto (interseção do aberto $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ com o fechado $\mathbb{R}^2 - X$), enquanto seu complementar Y não é.

Proposição 11. *Se um subconjunto localmente compacto $X \subset M$ é denso em M então X é aberto em M.*

Demonstração. Lembremos que, para todo aberto $A \subset M$, $A \cap X$ é denso em A. Para todo $x \in X$ existe uma vizinhança V de x em M tal que $V \cap X = F$ é compacto, e portanto fechado em M. Seja A aberto em M tal que $x \in A \subset V$. Então $A \cap X$ é denso em A e fechado em A pois $A \cap X = A \cap V \cap X = A \cap F$. Sendo assim, $A \cap X = A$, isto é, $A \subset X$. Obtemos portanto, para cada ponto $x \in X$ um aberto A tal que $x \in A \subset X$. Logo X é aberto.

Corolário 1. *Todo subconjunto localmente compacto $X \subset M$ é interseção de um subconjunto aberto com um subconjunto fechado.*

Com efeito, X é denso em $\overline{X}$, logo é aberto em $\overline{X}$, ou seja, existe A aberto em M tal que $X = A \cap \overline{X}$, o que prova o corolário.

Corolário 2. *Todo espaço mérico localmente compacto é homeomorfo a um espaço métrico completo.*

Com efeito, se M é localmente compacto, então M é aberto no seu completamento $\widehat{M}$ e portanto é homeomorfo a um espaço métrico completo, em virtude da Proposição 15, Capítulo 7.

Exemplo 28. Seja $f \colon M \to N$ contínua, aberta e sobrejetiva. Se M é localmente compacto então N também o é. Com efeito,

dado $y \in N$ existe $x \in M$ tal que $f(x) = y$. Seja V uma vizinhança compacta de x. Como f é aberta, $f(V)$ é uma vizinhança de y, a qual é compacta pois f é contínua. Não é verdade, porém, que a imagem de um conjunto localmente compacto $X \subset M$ por uma aplicação contínua $f\colon M \to N$ seja sempre um conjunto localmente compacto $f(X) \subset N$, mesmo se f é aberta. Por exemplo, seja $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a projeção $f(x, y, z) = (x, y)$ sobre o plano horizontal. Seja $X \subset \mathbb{R}^3$ a reunião do disco unitário aberto horizontal $D = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 < 1\}$ com o ponto $p = (1, 0, 1)$. Então $X = D \cup \{p\}$ é localmente compacto mas sua projeção horizontal $f(X) = D \cup \{(1, 0)\}$ não é.

Exemplo 29. Resulta do exemplo acima que se o produto $M \times N$ é localmente compacto, então M e N também o são. Reciprocamente, se M e N são localmente compactos então $M \times N$ também o é. Com efeito, dado arbitrariamente $z = (x, y) \in M \times N$, existem vizinhanças compactas $U \ni x$ em M e $V \ni y$ em N. Então $U \times V$ é uma vizinhança compacta de z em $M \times N$.

É claro que este resultado continua sendo válido para o produto $M_1 \times \cdots \times M_n$ de um número finito qualquer de fatores. Quanto a um produto infinito $M = \prod\limits_{i=1}^{\infty} M_i$, deve-se tomar cuidado pois o produto cartesiano de uma infinidade de vizinhanças pode não ser uma vizinhança.

Na realidade, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (produto de uma infinidade enumerável de cópias de $\mathbb{R}$) não é localmente compacto. Com efeito, dado qualquer $x = (x_1, \ldots, x_i, \ldots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, toda vizinhança V de x deve conter um aberto básico. Logo existem $n \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$ tais que $B(x_1; \varepsilon) \times \cdots \times B(x_n; \varepsilon) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \subset V$. Em particular $p_i(V) = \mathbb{R}$ para todo $i > n$. Segue-se daí que nenhum ponto $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ possui uma vizinhança compacta.

O resultado correto é o seguinte: o produto cartesiano $M = \prod\limits_{i=1}^{\infty} M_i$ é localmente compacto se, e somente se, cada fator M_i é localmente compacto e, salvo um número finito deles, todos são compactos.

Com efeito, se M é localmente compacto, tomamos $x \in M$. Existe uma vizinhança compacta $V \ni x$, a qual contém um aberto básico, do tipo $A_1 \times \ldots A_n \times \prod\limits_{i>n} M_i$. Segue-se que $p_i(V) = M_i$ para

todo $i > n$. Logo $M_{n+1}, M_{n+2}, \ldots$ são compactos. Além disso, os demais $M_i = p_i(M)$ são, pelo menos, localmente compactos porque cada p_i é aberta, contínua e sobrejetiva. Reciprocamente, se $M_1, \ldots, M_n$ são localmente compactos e $i > n \Rightarrow M_i$ compacto, então $\prod_{i>n} M_i$ é compacto, donde temos que $M = M_1 \times \cdots \times M_n \times \prod_{i>n} M_i$ é localmente compacto.

9 Espaços vetoriais normados de dimensão finita

Sejam E, F espaços vetoriais normados. Um homeomorfismo linear $f\colon E \to F$ é o que o nome diz: uma bijeção linear contínua cuja inversa (automaticamente linear) também é contínua. Às vezes se diz também que uma aplicação nestas condições é um isomorfismo topológico.

Proposição 12. *Seja E um espaço vetorial normado de dimensão finita n. Então:*

1] *E é linearmente homeomorfo a $\mathbb{R}^n$;*
2] *E é completo;*
3] *Toda aplicação linear $f\colon E \to F$ é contínua;*
4] *Duas normas quaisquer em E são equivalentes;*
5] *E é localmente compacto.*

Demonstração. 1] Seja $\{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de E. Definamos $h\colon \mathbb{R}^n \to E$ pondo

$$h(x) = h(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \cdot v_1 + \cdots + x_n \cdot v_n\,.$$

Pela definição de base, h é uma bijeção linear. Além disso (§4 do Capítulo 2), h é contínua.

Para mostrar que h^{-1} é contínua, devemos obter $\alpha > 0$ tal que $|h(x)| \geq \alpha \cdot |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. (Vide Corolário, Proposição 8, Capítulo 2.) Ora, a esfera unitária $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ é compacta e, como h é linear injetiva, temos $|h(u)| > 0$ para todo $u \in S^{n-1}$. Pelo Corolário da Proposição 4 (Teorema de Weierstrass), existe $\alpha > 0$ tal que $|h(u)| \geq \alpha$ para todo $u \in S^{n-1}$. Ora, para todo $x \neq 0$ em

$\mathbb{R}^n$, $x/|x| \in S^{n-1}$ logo $|h(x)| = |h(x/|x|)| \cdot |x| \geq \alpha \cdot |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

2] Todo homeomorfismo linear $h\colon \mathbb{R}^n \to E$ é um homeomorfismo uniforme. Como $\mathbb{R}^n$ é completo, E também é.

3] Seja $h\colon \mathbb{R}^n \to E$ um homeomorfismo linear. Como toda aplicação linear definida em $\mathbb{R}^n$, a aplicação $f \circ h\colon \mathbb{R}^n \to F$ é contínua. Logo $f = (f \circ h) \circ h^{-1}$ é contínua.

4] Dadas duas normas $|\ |_1$ e $|\ |_2$ em E, as aplicações identidade $i_{12}\colon (E, |\ |_1) \to (E, |\ |_2)$ e $i_{21}\colon (E, |\ |_2) \to (E, |\ |_1)$ são lineares e portanto contínuas.

5] $\mathbb{R}^n$ é localmente compacto, logo E também é.

Corolário. *Seja E um espaço vetorial normado. Todo subespaço vetorial de dimensão finita $F \subset E$ é fechado.*

De fato, F é completo.

Exemplo 30. Seja (p_n) uma seqüência de polinômios, todos com grau $\leq k$. Então podemos escrever, para cada $n \in \mathbb{N}$ e cada $x \in \mathbb{R}$, $p_n(x) = \sum_{i=0}^{k} a_{ni} x^i$. As seguintes afirmações são equivalentes:

1) (p_n) converge uniformemente num intervalo $[a, b]$;
2) (p_n) converge simplesmente em $k+1$ pontos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$;
3) Para cada $i = 0, 1, \ldots, k$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{ni} = a_i \in \mathbb{R}$.

No caso afirmativo, $\lim p_n$ é o polinômio $p(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i$.

Com efeito, seja P_{k+1} o espaço vetorial (de dimensão $k+1$) formado pelos polinômios de grau $\leq k$. Dado um polinômio $q(x) = \sum_{i=0}^{k} b_i x^i \in P_{k+1}$, podemos considerar as seguintes normas:

$$|q|_1 = \sup_{a \leq x \leq b} |q(x)|, |q|_2 = \max\{|q(x_0)|, \ldots, |q(x_k)|\}$$

e

$$|q|_3 = \max\{|b_0|, \ldots, |b_k|\}.$$

(Para verificar que são normas, usa-se o fato de que um polinômio de grau $\leq k$ que se anula em $k+1$ pontos distintos é identicamente

nulo.) Estas três normas determinam em P_{k+1} os três tipos de convergência expressos pelas condições 1), 2) e 3) acima. Como as normas são equivalentes, segue-se que 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 1). Além disso, se, por exemplo, $p_n \to p$ uniformemente em $[a, b]$, como P_{k+1} é fechado em $\mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R})$, segue-se que $p \in P_{k+1}$. A forma de p é dada por 3).

Para encerrar, demonstraremos o Teorema de Riesz, segundo o qual nenhuma bola num espaço vetorial normado de dimensão infinita é compacta.

Lembremos que, num espaço vetorial normado, duas bolas fechadas quaisquer são homeomorfas, de modo que uma delas é compacta se, e somente se, todas são. (No caso afirmativo, o espaço é localmente compacto.)

Lema. *Seja F um subespaço vetorial fechado de um espaço vetorial normado E. Se $F \neq E$ então, para todo $\varepsilon > 0$ dado, pode-se obter um vetor $u \in E$ com $|u| = 1$ e $d(u, F) \geq 1 - \varepsilon$.*

Demonstração. Tomemos $x \in E - F$. Como F é fechado, temos $d(x, F) > 0$. Escolhamos $y \in F$ bem próximo de x: com $|x - y| < d(x, F) + \delta$, onde $\delta > 0$ será determinado logo mais. Escrevamos $u = (x - y)/|x - y|$. Então $|u| = 1$ e, para todo $y' \in F$, levando em conta que $y'' = y + |x - y| y' \in F$, vem:

$$|u - y'| = \frac{|x - y - |x - y| \cdot y'|}{|x - y|} = \frac{|x - y''|}{|x - y|} \geq \frac{d(x, F)}{d(x, F) + \delta}\,.$$

Como o último quociente acima tem limite 1 quando $\delta \to 0$, segue-se que podemos escolher $\delta > 0$ tal que ele seja $\geq 1 - \varepsilon$. Então, para todo $y' \in F$, temos $|u - y'| \geq 1 - \varepsilon$, o que significa $d(u, F) \geq 1 - \varepsilon$.

Proposição 13 (*Teorema de Riesz*). *Todo espaço vetorial normado localmente compacto E tem dimensão finita.*

Demonstração. A esfera unitária $S = \{u \in E; |u| = 1\}$ é compacta. Usaremos repetidamente o lema acima, com $\varepsilon = 1/2$. Sejam $u_1 \in S$ e F_1 o subespaço vetorial (fechado) gerado por u_1. Se $F_1 \neq E$, existe $u_2 \in S$ com $d(u_2, F_1) \geq 1/2$. Em particular, $|u_2 - u_1| \geq 1/2$. Seja F_2 o subespaço vetorial (fechado) gerado por $\{u_1, u_2\}$. Se $F_2 \neq E$, existe $u_3 \in S$, com $d(u_3, F_2) \geq 1/2$. Em particular, $|u_3 - u_2| \geq 1/2$ e $|u_3 - u_1| \geq 1/2$. Prosseguindo assim, ou

chegaremos a um conjunto finito de vetores $u_1, \ldots, u_n$ que geram E (e então E tem dimensão finita) ou obteremos uma seqüência de vetores unitários $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ tais que $|u_m - u_n| \geq 1/2$ para $m \neq n$ quaisquer (e então a esfera unitária S não é compacta).

10 Eqüicontinuidade

Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ tem fecho compacto se, e somente se, é limitado. Um subconjunto $X \subset \mathcal{C}(K; N)$, onde K é compacto, pode ser limitado e fechado sem ser compacto. Neste parágrafo mostraremos que a propriedade conhecida como eqüicontinuidade é a condição adicional que precisa cumprir um subconjunto limitado $X \subset \mathcal{C}(K; N)$ para ter fecho compacto.

Exemplo 31. A bola unitária fechada $D \subset \mathcal{C}([0,1]; \mathbb{R})$ é formada pelas funções contínuas $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ tais que $|f(x)| \leq 1$ para todo $x \in [0,1]$. D, embora limitado e fechado, não é compacto porque o espaço vetorial normado $\mathcal{C}([0,1]; \mathbb{R})$ tem dimensão infinita. De fato, as funções $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, dadas por $f_n(x) = x^n$ são linearmente independentes, para $n = 1, 2, \ldots$. Para verificar diretamente que D não é compacto basta considerar a seqüência de funções contínuas $g_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, definidas por $g_n(x) = 0$ se $0 \leq x \leq 1/(n+1)$, $g_n(x) = 1$ se $1/n \leq x \leq 1$ e $g_n(x)$ linear, do tipo $ax + b$, se $1/(n+1) \leq x \leq 1/n$. (Isto obriga $g_n(x) = n(n+1)x - n$ nesse intervalo. O leitor deve traçar o gráfico de g_n .) Então $||g_m - g_n|| = 1$ se $m \neq n$ e $||g_n|| = 1$ para todo n. Logo D não é compacto.

Sejam M, N espaços métricos e E um conjunto de aplicações $f\colon M \to N$. O conjunto E diz-se *eqüicontínuo no ponto* $a \in M$ quando, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(x,a) < \delta$ em M implique $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$, *seja qual for* $f \in E$.

A essência da definição acima reside no fato de que a escolha de δ a partir do ε dado é a mesma *para todas as aplicações* f pertencentes ao conjunto E.

Evidentemente, se E é eqüicontínuo no ponto a, então todas as aplicações $f \in E$ são contínuas nesse ponto.

Um conjunto E de aplicações $f\colon M \to N$ chama-se *eqüicontínuo* quando é eqüicontínuo em todos os pontos de M.

Uma seqüência de aplicações $f_n\colon M \to N$ diz-se *eqüicontínua no*

ponto $a \in M$ (respect. *eqüicontínua*) quando o conjunto $\{f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots\}$ o for.

Exemplo 32. Se M é discreto, todo conjunto E de aplicações $f\colon M \to N$ é eqüicontínuo: dados $a \in M$ e $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta$ em M implique $x = a$. Todo conjunto finito $E = \{f_1, \ldots, f_n\}$ de aplicações $f_i\colon M \to N$ contínuas (num ponto $a \in M$) é eqüicontínuo (no ponto a). De fato, dado $\varepsilon > 0$ existe, para cada $i = 1, \ldots, n$, $\delta_i < 0$ tal que $d(x, a) < \delta_i \Rightarrow d(f_i(x), f_i(a)) < \varepsilon$. Seja $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$. Então $d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon$ para toda $f \in E$. De modo análogo se mostra que a reunião $E_1 \cup \cdots \cup E_n$ de um número finito de conjuntos eqüicontínuos é um conjunto eqüicontínuo. É evidente que todo subconjunto de um conjunto eqüicontínuo é eqüicontínuo.

Exemplo 33. O caso mais freqüente de conjunto eqüicontínuo ocorre quando se tem uma constante $c>0$ e toda aplicação $f{:}M{\to}N$ pertencente ao conjunto E cumpre a condição de Lipschitz $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$. Mais geralmente, se, para cada ponto $x \in M$, existem uma bola $B_x = B(x; r_x)$ e também uma constante $c_x > 0$ tais que $d(f(y), f(z)) \leq c_x \cdot d(y, z)$ para $y, z \in B_x$ e $f \in E$ quaisquer, então o conjunto E de aplicações $f\colon M \to N$ é eqüicontínuo. Um exemplo disso é dado por um conjunto E de função $f\colon I \to \mathbb{R}$, deriváveis num intervalo I, tais que $|f'(x)| \leq c$ para toda $f \in E$ e todo $x \in I$ ou, mais geralmente, quando cada ponto de I é centro de um intervalo menor, no qual as derivadas das funções pertencentes a E são limitadas (em valor absoluto) por uma constante. A seqüência de funções $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x/n$, é eqüicontínua.

Exemplo 34. Se uma seqüência eqüicontínua de aplicações $f_n\colon M \to N$ converge simplesmente para $f\colon M \to N$ então o conjunto $\{f, f_1, \ldots, f_n, \ldots\}$ é eqüicontínuo. Com efeito, dados $a \in M$ e $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f_n(x), f_n(a)) < \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e portanto $d(f(x), f(a)) \leq \varepsilon$. Note, em particular, que f é contínua.

Lema. *Se uma seqüência eqüicontínua de aplicações $f_n: M \to N$ converge simplesmente em M, então a convergência é uniforme em cada parte compacta $K \subset M$.*

Demonstração. Supondo $f_n \to f$ simplesmente, seja dado $\varepsilon > 0$. Para cada $x \in M$ existe $n_x \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_x \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon/3$. Pelo Exemplo 34 acima, $\{f, f_1, \dots, f_n, \dots\}$ é eqüicontínuo. Logo cada $x \in M$ pertence a uma bola aberta B_x tal que $y \in B_x \Rightarrow d(f_n(y), f_n(x)) < \varepsilon/3$ e $d(f(y), f(x)) < \varepsilon/3$. Da cobertura aberta $K \subset \bigcup_{x \in K} B_x$ extraímos a subcobertura finita $K \subset B_{x_1} \cup \cdots \cup B_{x_p}$. Seja $n_0 = \max\{n_{x_1}, \dots, n_{x_p}\}$. Afirmamos que $n > n_0 \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ para todo $x \in K$. Com efeito, se $n > n_0$ e $x \in K$, então existe i, com $1 \le i \le p$, tal que $x \in B_{x_i}$. Logo, temos $d(f_n(x), f_n(x_i)) < \varepsilon/3$. Assim,

$$d(f_n(x), f(x)) \le d(f_n(x), f_n(x_i)) + \\ + d(f_n(x_i), f(x_i)) + d(f(x_i), f(x)) < \varepsilon.$$

Proposição 14. *Dada uma seqüência eqüicontínua de aplicações $f_n: M \to N$, suponhamos que, para cada $x \in M$, o conjunto $\{f_n(x); n \in \mathbb{N}\}$ tenha fecho completo em N. Se (f_n) converge simplesmente num subconjunto denso $D \subset M$ então (f_n) converge uniformemente em cada parte compacta de M.*

Demonstração. Mostraremos, em primeiro lugar, que (f_n) converge simplesmente em todo o espaço. Para isso, basta verificar que, tomado arbitrariamente $x \in M$, a seqüência $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy em N. Ora, dado $\varepsilon > 0$ existe, pela eqüicontinuidade, uma bola $B = B(x; r)$ tal que $y \in B \Rightarrow d(f_n(y), f_n(x)) < \varepsilon/3$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Escolhamos um $y \in B \cap D$. Como $\exists \lim_{n \to \infty} f_n(y)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow d(f_m(y), f_n(y)) < \varepsilon/3$. Então:

$$m, n > n_0 \Rightarrow d(f_m(x), f_n(x)) \le d(f_m(x), f_m(y)) + \\ + d(f_m(y), f_n(y)) + d(f_n(y), f_n(x)) < \varepsilon.$$

Segue-se então do lema anterior que (f_n) converge uniformemente em cada parte compacta de M.

Exemplo 35. A seqüência de funções $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dadas por $f_n(x) = x/n$, é eqüicontínua e converge simplesmente para 0 em $\mathbb{R}$ mas a convergência não é uniforme em toda a reta.

Um conjunto E de aplicações $f\colon M \to N$ diz-se *uniformemente eqüicontínuo* quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que $d(x,y) < \delta$ em $M \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ para toda $f \in E$.

Uma aplicação contínua $f\colon M \to N$ que não seja uniformemente contínua nos fornece um exemplo de um conjunto eqüicontínuo $E = \{f\}$ que não é uniformemente eqüicontínuo.

Proposição 15. *Se K é compacto, todo conjunto eqüicontínuo de aplicações $f\colon K \to N$ é uniformemente eqüicontínuo.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, cada ponto $x \in K$ é centro de uma bola B_x tal que $y \in B_x \Rightarrow d(f(y), f(x)) < \varepsilon/2$ para toda $f \in E$. Então $y, z \in B_x \Rightarrow d(f(y), f(z)) < \varepsilon$ para toda $f \in E$. Seja δ um número de Lebesgue da cobertura $K = \bigcup_{x \in K} B_x$. Se $y, z \in K$ são tais que $d(y,z) < \delta$, existe algum $x \in K$ com $y, z \in B_x$. Logo $d(y,z) < \delta \Rightarrow d(f(y), f(z)) < \varepsilon$.

Dados um conjunto E de aplicações $f\colon M \to N$ e um ponto $x \in M$, poremos $E(x) = \{f(x); f \in E\}$. Assim, $E(x)$ é o subconjunto de N formado pelos valores que as aplicações $f \in E$ assumem no ponto x. Por exemplo, quando $M = N = \mathbb{R}$, $E(x)$ pode ser visualizado geometricamente tomando-se a reta vertical que passa pelo ponto $(x, 0)$ e vendo em que pontos ela corta os gráficos das funções $f \in E$.

Um subconjunto X de um espaço métrico M chama-se *relativamente compacto* quando seu fecho $\overline{X}$ é compacto. Isto significa que toda seqüência de pontos $x_n \in X$ possui uma subseqüência convergente em M (podendo ocorrer que o limite dessa subseqüência não pertença a X).

Se $X \subset M$ é relativamente compacto e $f\colon M \to N$ é contínua, então $f(X) \subset N$ é relativamente compacto. Com efeito, sendo $\overline{X}$ compacto, $f(\overline{X})$ é compacto. Em particular, $f(\overline{X})$ é fechado em N. Como $f(X) \subset f(\overline{X})$, segue-se que $\overline{f(X)} \subset f(\overline{X})$ e portanto $\overline{f(X)}$ é compacto. [Na realidade, para qualquer subconjunto $X \subset M$, a continuidade de f garante $f(\overline{X}) \subset \overline{f(X)}$, de modo que, para X relativamente compacto, temos $f(\overline{X}) = \overline{f(X)}$.]

Proposição 16. (*Teorema de Ascoli-Arzelá*). *Seja E um conjunto de aplicações contínuas $f\colon K \to N$, onde K é compacto. A fim de que $E \subset \mathcal{C}(K; N)$ seja relativamente compacto, é necessário e*

suficiente que:

1º) *E seja eqüicontínuo;*

2º) *Para cada $x \in K$, o conjunto $E(x)$ seja relativamente compacto em N.*

Demonstração. Suponhamos, em primeiro lugar, que $E \subset \mathcal{C}(K;N)$ seja relativamente compacto. Fixado $x \in K$, a aplicação $v_x \colon \mathcal{C}(K;N) \to N$, dada por $v_x(f) = f(x)$, é uma contração, e portanto é contínua. Como $E(x) = v_x(E)$, segue-se que $E(x)$ é relativamente compacto. Sejam agora $a \in K$ e $\varepsilon > 0$. A função $\varphi \colon \overline{E} \times K \to \mathbb{R}$, definida por $\varphi(f,x) = d(f(x), f(a))$, também é contínua. Usando apenas a compacidade de $\overline{E}$, a Proposição 5 nos permite obter $\delta > 0$ tal que $d(x,a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon$ para toda $f \in \overline{E}$. Logo $\overline{E}$ (e portanto E) é eqüicontínuo em qualquer ponto $a \in K$. Isto mostra que as condições 1º) e 2º) acima são necessárias para a compacidade de $\overline{E}$. Reciprocamente, supondo satisfeitas estas condições, tomemos um subconjunto enumerável $D = \{x_1, \ldots, x_i, \ldots\}$ denso em K. (Vide Corolário 3, Proposição 7.) Para cada $i \in \mathbb{N}$, seja $L_i = \overline{E(x_i)} \subset N$. O produto cartesiano $\prod_{i=1}^{\infty} L_i$ é compacto (Teorema de Cantor-Tychonov). Para cada $f \in E$, chamemos de f' o ponto de $\prod L_i$ cuja i-ésima coordenada é $f(x_i)$. [Essencialmente, f' é a restrição de f a D.] Uma seqüência de aplicações $f_n \in E$ converge simplesmente em D se, e somente se, (f'_n) converge em $\prod L_i$. A compacidade de $\prod L_i$ garante então que toda seqüência de aplicações $f_n \in E$ possui uma subseqüência que converge simplesmente em D e portanto uniformemente em K. (Vide Proposição 14.) Logo $E \subset \mathcal{C}(K;N)$ é relativamente compacto.

Observação. Dada uma aplicação $\alpha \colon M \to N$, seja $\mathcal{C}_\alpha(M;N)$ o conjunto das aplicações contínuas $f \colon M \to N$ tais que $d(f,\alpha) = \sup_{x \in M} d(f(x), \alpha(x)) < +\infty$. Munindo $\mathcal{C}_\alpha(M;N)$ da métrica do sup, a demonstração acima mostra que $E \subset \mathcal{C}_\alpha(M;N)$ relativamente compacto $\Rightarrow$ E eqüicontínuo e $E(x)$ relativamente compacto, sem ser necessário fazer a hipótese de M compacto.

O Teorema de Ascoli-Arzelá, conforme enunciado acima, não é válido para aplicações definidas num espaço não-compacto. Com efeito, a seqüência de funções $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dadas por $f_n(x) = x/n$,

é eqüicontínua e, para todo $x \in \mathbb{R}$, $\{f_n(x); n \in \mathbb{N}\}$ é relativamente compacto. Mas nenhuma subseqüência de (f_n) converge uniformemente em $\mathbb{R}$. Por outro lado, $f_n \to 0$ uniformemente em cada parte compacta. A Proposição 16, usada diretamente, nos diz que, dada uma seqüência eqüicontínua de aplicações $f_n\colon M \to N$, com $\{f_n(x); n \in \mathbb{N}\}$ relativamente compacto para cada $x \in M$ então, para cada compacto $K \subset M$ pode-se obter uma subseqüência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_K}$, uniformemente convergente em K. Isto, porém, é insatisfatório. Gostaríamos de obter uma subseqüência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ que convergisse uniformemente (a mesma subseqüência!) em cada compacto $K \subset M$. Isto é possível de conseguir mediante uma restrição conveniente sobre M.

Até o fim desta seção suporemos que o espaço métrico M satisfaz a seguinte condição:

(S) $M = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_i \cup \dots$ *onde cada* K_i *é compacto e* $K_i \subset \operatorname{int} K_{i+1}$ *para cada* $i \in \mathbb{N}$. (*)

Exemplo 36. O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ satisfaz a condição (S). Basta tomar K_i = bola fechada de centro 0 e raio i. Se M satisfaz (S) então M é localmente compacto pois $x \in M \Rightarrow x \in K_i$ para algum $i \Rightarrow K_{i+1}$ é uma vizinhança compacta de x. Logo $\mathbb{Q}$, por exemplo, não cumpre a condição (S), embora seja uma reunião enumerável de compactos (seus pontos)

Observamos que se um espaço M cumpre a condição (S) então todo compacto $K \subset M$ está contido em algum dos K_i. Com efeito, a cobertura aberta $K \subset M = \bigcup_{i=1}^{\infty} \operatorname{int} K_i$ admite uma subcobertura finita $K \subset \operatorname{int} K_{i_1} \cup \dots \cup \operatorname{int} K_{i_p}$, com $i_1 < \dots < i_p$. Logo $K \subset \operatorname{int} K_{i_p} \subset K_{i_p}$.

Assim, se M cumpre (S), dizer que uma seqüência de aplicações $f_n\colon M \to N$ converge uniformemente em cada um dos K_i é o mesmo que afirmar que (f_n) converge uniformemente em cada parte compacta $K \subset M$.

Se o espaço métrico M cumpre (S), dado qualquer espaço métrico N, definiremos uma métrica d^* no espaço $\mathcal{C}(M; N)$ das aplicações

(*) Os espaços que cumprem esta condição serão estudados no capítulo seguinte, sob o nome de "espaços localmente compactos separáveis".

contínuas $f\colon M \to N$, de modo que $\lim f_n = f$ segundo essa métrica se, e somente se, $f_n \to f$ uniformemente em cada parte compacta $K \subset M$.

Dadas $f, g\colon M \to N$ contínuas poremos, para cada $i \in \mathbb{N}$, $f_i = f|K_i$ e $g_i = g|K_i$. Logo, $d(f_i, g_i) = \sup_{x \in K_i} d(f(x), g(x))$. E definiremos:

$$d^*(f,g) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{d(f_i, g_i)}{1 + d(f_i, g_i)}\,.$$

Escreveremos $\mathcal{C}_c(M;N) = (\mathcal{C}(M;N), d^*)$ para indicar o espaço métrico formado pelas aplicações contínuas $f\colon M \to N$, com a métrica d^*.

É interessante observar que a aplicação natural

$$\varphi\colon \mathcal{C}_c(M;N) \to \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{C}(K_i;N),$$

dada por $\varphi(f) = (f|K_i)_{i \in \mathbb{N}} = (f_i)_{i \in \mathbb{N}}$, é uma imersão isométrica, se considerarmos o produto cartesiano $\prod_i \mathcal{C}(K_i;N)$ munido da métrica usual

$$d(u,v) = \sum \frac{1}{2^i} \frac{d(u_i, v_i)}{1 + d(u_i, v_i)}\,,$$

onde $u = (u_i)$ e $r = (v_i)$.

Como a convergência no produto cartesiano é convergência coordenada por coordenada e a convergência em cada fator $\mathcal{C}(K_i;N)$ é convergência uniforme em K_i, segue-se que $\lim f_n = f$ em $\mathcal{C}_c(M;N)$ se, e somente se, $f_n \to f$ uniformemente em cada K_i, ou seja, em cada parte compacta $K \subset M$.

Para uso abaixo, registremos o seguinte

Lema. *A imagem F da imersão isométrica φ é um subconjunto fechado de $\prod_i \mathcal{C}(K_i;N)$.*

Demonstração. F é formado pelas seqüências $u = (u_i)$ tais que, para cada $i \in \mathbb{N}$, $u_i\colon K_i \to N$ é contínua e $i < j \Rightarrow u_i = u_j|K_i$. Portanto $u \in \overline{F} \Rightarrow u = \lim u_n$, onde cada $u_n \in F$. Logo $u_i = \lim_{n\to\infty} u_{ni}$ uniformemente, para cada $i \in \mathbb{N}$. Assim $i < j \Rightarrow u_i = \lim_n u_{ni} = \lim_n u_{nj}|K_i = u_j|K_i$. Portanto $u \in \overline{F} \Rightarrow u \in F$.

Podemos agora enunciar e demonstrar a forma abaixo do Teorema de Ascoli-Arzelá, que inclui a Proposição 16 como caso particular.

Proposição 17. *Se $M = \cup K_i$ é uma reunião enumerável de compactos, com $K_i \subset \operatorname{int} K_{i+1}$ para cada i, então um conjunto $E \subset \mathcal{C}_c(M;N)$ é relativamente compacto se, e somente se:*

1º) *E é eqüicontínuo.*

2º) *$E(x) \subset N$ é relativamente compacto, para cada $x \in M$.*

Demonstração. Usando a isometria $\varphi\colon \mathcal{C}_c(M;N) \to F \subset \prod_i \mathcal{C}(K_i;N)$, vemos que E relativamente compacto $\Leftrightarrow$ $\varphi(E)$ relativamente compacto em F $\Leftrightarrow$ $\varphi(E)$ relativamente compacto em $\prod \mathcal{C}(K_i;N)$, pois F é fechado. Ora, um subconjunto $X \subset \prod Y_i$ é relativamente compacto se, e somente se, cada projeção $p_i(X) \subset Y_i$ é relativamente compacta. (Verificação imediata, a partir de Cantor-Tychonov.) Ora,

$$p_i(\varphi(E)) = E|K_i \, (= \{f|K_i; f \in E\})$$

e os itens 1º) e 2º) são válidos para E se, e somente se, são válidos para cada $E|K_i$, $i = 1, 2, \ldots$. Logo a Proposição 17 decorre da Proposição 16.

Um conjunto E de aplicações $f\colon M \to N$ diz-se *pontualmente limitado* quando, para cada $x \in M$, o conjunto $E(x) \subset N$ é limitado. Definição análoga se dá para seqüência pontualmente limitada.

Corolário. *Seja M como na Proposição 17. Toda seqüência eqüicontínua e pontualmente limitada de aplicações $f_n\colon M \to \mathbb{R}^k$ possui uma subseqüência que converge uniformemente em cada parte compacta de M.*

Com efeito, todo subconjunto limitado do espaço euclidiano $\mathbb{R}^k$ é relativamente compacto. Logo $E = \{f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots\}$ cumpre as condições da Proposição 17.

Exemplo 37. Algumas das aplicações mais interessantes do Teorema de Ascoli-Arzelá ocorrem na teoria das funções de uma variável complexa devido ao fato de que todo conjunto limitado de funções holomorfas é eqüicontínuo.

Mais precisamente, seja U um subconjunto aberto do plano $\mathbb{R}^2$, que identificaremos com o corpo dos números complexos. Seja E

um conjunto de funções holomorfas $f\colon U \to \mathbb{R}^2$ (isto é, funções que possuem derivadas, no sentido dos números complexos, em todos os pontos de U). Suponhamos que, para cada compacto $K \subset U$, exista uma constante $c = c_K > 0$ tal que $z \in K$, $f \in E \Rightarrow |f(z)| \leq c$. Diz-se então que as funções $f \in E$ são uniformemente limitadas em cada compacto $K \subset U$. Afirmamos que, neste caso, E é eqüicontínuo.

Com efeito, dado $z_0 \in U$, seja $K = \{w \in \mathbb{R}^2; |w - z_0| \leq 2r\}$ um disco fechado de centro z_0 e raio $2r$, contido em U. Sejam $c = c_K$ e $B = B[z_0; r]$.

Mostremos que $z \in B \Rightarrow |f'(z)| \leq 2c/r$.

De fato, chamando de $C = \{w \in \mathbb{R}^2; |w - z_0| = 2r\}$ o bordo de K, a fórmula integral de Cauchy nos dá, para todo $z \in B$:

$$|f'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(z-w)^2}\, dw \right| \leq \frac{c}{2\pi r^2} \cdot 4\pi r = \frac{2c}{r},$$

pois, para todo $w \in C$, $|z - w| \geq r$ e $|f(w)| \leq c$.

Segue-se do Teorema do Valor Médio que $|f(z) - f(w)| \leq 2\,\frac{c}{r}\,|z - w|$ para $z, w \in B$ quaisquer. Portanto E é eqüicontínuo.

Concluímos então do Teorema de Ascoli-Arzelá (Proposição 17) que uma seqüência de funções holomorfas $f_n\colon U \to \mathbb{R}^2$, uniformemente limitadas em cada parte compacta de U, possui uma subseqüência que converge uniformemente em cada subconjunto compacto de U. O limite da subseqüência é necessariamente uma função holomorfa em U, em virtude do Teorema de Morera. As derivadas das funções da subseqüência também convergem uniformemente em cada parte compacta de U, em virtude da fórmula de Cauchy.

11 Os teoremas de aproximação de Weierstrass e Stone

As funções usuais da Análise (com $\operatorname{sen} x$, e^x, $\log x$, etc.) são analíticas, isto é, admitem, em torno de cada ponto do seu domínio, um desenvolvimento de Taylor, o qual representa a função dada como soma de uma série de potências: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n$. Escrevendo $p_n(x) = c_0 + c_1(x - a) + \cdots + c_n(x - a)^n$, vemos que cada p_n é um polinômio e $f(x) = \lim_{n\to\infty} p_n(x)$ para todo x no intervalo de

convergência da série. Além disso, em cada subconjunto compacto desse intervalo de convergência, tem-se $p_n \to f$ uniformemente. Como se sabe, as funções analíticas possuem derivadas de todas as ordens.

Um resultado notável, demonstrado por K. Weierstrass em 1885, generaliza a situação acima descrita. Segundo Weierstrass, *qualquer* função contínua $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, mesmo que não possua derivada, é limite uniforme de uma seqüência de polinômios no seu intervalo de definição $[a, b]$. Assim, dada f contínua em $[a, b]$ e dado $\varepsilon > 0$, existe um polinômio p tal que $|f(x) - p(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in [a, b]$.

Isto se exprime dizendo que toda função contínua num intervalo compacto pode ser uniformemente aproximada por polinômios.

Considerando o espaço vetorial $\mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R})$, com a norma $||f|| = \sup\{|f(x)|; x \in [a, b]\}$, o conjunto $\mathcal{P}$ dos polinômios (restritos ao intervalo $[a, b]$) é um subespaço vetorial de $\mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R})$. O Teorema de Weierstrass diz que o subespaço $\mathcal{P}$ é denso no espaço $\mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R})$.

Daremos a seguir três demonstrações do Teorema de Weierstrass.

A primeira delas usa a técnica de regularizar uma função tomando a média ponderada dos valores que ela assume na vizinhança de cada um dos pontos do seu domínio. Tal média ponderada é o que se chama a "convolução" da função dada com um núcleo conveniente. Esta é uma ligeira modificação (devida a E. Landau) da demonstração original de Weierstrass.

Começaremos com uma motivação informal.

Seja φ uma função real contínua positiva que se anula fora do intervalo $[-\delta, \delta]$. Dada uma função contínua $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a *convolução* de f com φ é a função $f * \varphi$, definida para todo $x \in \mathbb{R}$ pela expressão

$$(f * \varphi)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x + t)\varphi(t)\, dt = \int_{-\delta}^{+\delta} f(x + t)\varphi(t)\, dt.$$

Suponhamos $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)dt = \int_{-\delta}^{+\delta} \varphi(t)dt = 1$. Então a integral que define $f * \varphi$ pode ser pensada como a média ponderada dos valores que f assume no intervalo $[x - \delta, x + \delta]$, sendo φ a função dos pesos. Como $\int \varphi = 1$, a soma dos pesos é igual a 1. Se tomarmos o número positivo δ cada vez menor, a continuidade de f nos diz que a média dos seus valores no intervalo $[x - \delta, x + \delta]$ cada vez mais se

aproximará do valor $f(x)$. Assim, f será o limite das convoluções $f * \varphi$ quando $\delta \to 0$.

No Teorema de Weierstrass, procuraremos obter uma seqüência de núcleos φ_n tais que $f * \varphi_n$ sejam polinômios. Em compensação, o fato de que φ_n se anula fora de uma pequena vizinhança de 0 será válido apenas aproximadamente. (Vide Lema 1, a seguir.)

Passemos agora a considerações mais precisas.

Proposição 18. (*Teorema de aproximação de Weierstrass.*) *Dada uma função contínua $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, existe uma seqüência de polinômios p_n tais que $\lim_{n\to\infty} p_n = f$ uniformemente em $[a,b]$.*

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $c_n = \int_{-1}^{+1}(1-t^2)^n\,dt$; definamos a função $\varphi_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pondo $\varphi_n(t) = 0$ se $|t| \geq 1$ e, para $t \in [-1,+1]$, $\varphi_n(t) = (1/c_n)(1-t^2)^n$. Cada φ_n é contínua (com derivadas contínuas até a ordem $n-1$); tem-se

$$\varphi_n(-t) = \varphi_n(t) \text{ e } \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(t)\,dt = \int_{-1}^{+1} \varphi_n(t)\,dt = 1.$$

O Teorema de Weierstrass resulta dos três lemas abaixo.

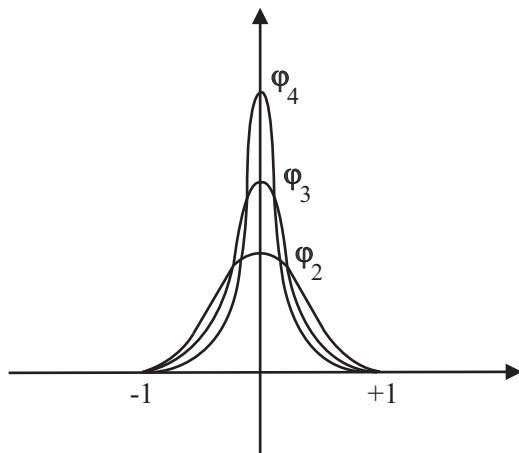
Lema 1. *Se $0 < \delta < 1$ então $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = 0$ uniformemente para $|x| \geq \delta$.*

Demonstração. Temos

$$c_n = 2\int_0^1 (1-t^2)^n\,dt = 2\int_0^1 (1+t)^n(1-t)^n\,dt \geq 2\int_0^1 (1-t)^n\,dt = \frac{2}{n+1}\cdot$$

Logo

$$\delta \leq |x| \Rightarrow \varphi_n(x) \leq (1-\delta^2)^n \cdot (n+1)/2.$$

Como $1-\delta^2$ é um número positivo menor do que 1, é imediato que $\lim_{n\to\infty} (1-\delta^2)^n \cdot (n+1) = 0$, donde se segue o resultado.

A figura acima ilustra a forma aproximada dos gráficos das funções φ_n. A área subtendida pelo eixo das abcissas e cada gráfico é igual a 1, o que obriga $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(0) = \infty$. Se existisse $\varphi = \lim\limits_{n} \varphi_n$, teríamos $\varphi(x) = 0$ para todo $x \neq 0$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,dt = 1$. Uma teratia como essa é o que os físicos chamam "a função de Dirac". Evidentemente, ela não pode ser uma função no sentido usual. A formulação matemática adequada das funções de Dirac se faz na Teoria das Distribuições.

Lema 2. *Seja $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ contínua, com $f(0) = f(1) = 0$. Considere f definida (e contínua) em toda a reta $\mathbb{R}$ pondo $f(x) = 0$ se $x \notin [0,1]$. Para todo $x \in [0,1]$ e todo $n \in \mathbb{N}$ escreva*

$$p_n(x) = \int_{-1}^{+1} f(x+t)\varphi_n(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)\varphi_n(t)\,dt.$$

Então $p_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, assim definida, é (a restrição de) um polinômio.

Demonstração. A mudança de variável $y = x + t$ nos dá, quando $0 \leq x \leq 1$:

$$p_n(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(y)\varphi_n(y-x)\,dy = \int_0^1 f(y)\varphi_n(y-x)\,dy.$$

A segunda igualdade vale porque, para todo $x \in [0,1]$, tem-se $[x-1, x+1] \supset [0,1]$ e f é nula fora do intervalo $[0,1]$. Sendo

$x, y \in [0,1]$, temos $y - x \in [-1, +1]$, logo

$$\varphi_n(y-x) = \frac{1}{c_n}[1-(y-x)^2]^n = \sum_{i=0}^{2n} \xi_i(y)x^i.$$

Pondo para cada $i = 0, 1, \ldots, 2n$, $a_i = \int_0^1 f(y) \cdot \xi_i(y)\, dy$, resulta que $p_n(x) = \sum_{i=0}^{2n} a_i \cdot x^i$ se $0 \le x \le 1$, o que demonstra o lema.

Lema 3. *Nas condições do lema anterior, tem-se* $\lim_{n\to\infty} p_n = f$ *uniformemente no intervalo* $[0,1]$.

Demonstração. Como $\int_{-1}^{+1} \varphi_n(t)\, dt = 1$, temos

$$f(x) = \int_{-1}^{+1} f(x)\varphi_n(t)\, dt.$$

Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in [0,1]$, vale

$$f(x) - p_n(x) = -\int_{-1}^{+1} [f(x+t) - f(x)]\varphi_n(t)\, dt.$$

Como f é uniformemente contínua, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|t| < \delta \Rightarrow |f(x+t) - f(x)| < \varepsilon/3$ qualquer que seja $x \in [0,1]$. Seja $M = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Pelo Lema 1, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$, $|t| \ge \delta \Rightarrow |\varphi_n(t)| < \varepsilon/6M$. Logo, para todo $n > n_0$ e todo $x \in [0,1]$ temos: $|f(x) - p_n(x)| \le A + B + C$, onde

$$A = \int_{-1}^{-\delta} |f(x+t) - f(x)|\varphi_n(t)\, dt < 2M \cdot \frac{\varepsilon}{6M} = \frac{\varepsilon}{3},$$

$$B = \int_{-\delta}^{+\delta} |f(x+t) - f(x)|\varphi_n(t)\, dt < \frac{\varepsilon}{3}\int_{-\delta}^{+\delta} \varphi_n(t)\, dt \le \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{e}$$

$$C = \int_{\delta}^{1} |f(x+t) - f(x)|\varphi_n(t)\, dt < 2M \cdot \frac{\varepsilon}{6M} = \frac{\varepsilon}{3}\cdot$$

Logo $|f(x) - p_n(x)| < \varepsilon$ sempre que $n > n_0$ e $x \in [0,1]$. Isto prova o Lema 3.

Os lemas acima mostram que toda função contínua $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $f(0) = f(1) = 0$ é limite uniforme de uma seqüência de

polinômios. O caso geral do Teorema de Aproximação de Weierstrass se reduz a este. De fato, em primeiro lugar, se $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua arbitrária, então $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(t) = g(t) - g(0) - t[g(1) - g(0)],$$

é contínua e tal que $f(0) = f(1) = 0$. Logo f é limite uniforme de polinômios e daí se segue imediatamente que g também o é. Portanto qualquer função contínua $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ pode ser uniformemente aproximada por polinômios. Finalmente, se $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua cujo domínio é um intervalo compacto arbitrário $[a,b]$ então $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, definida por $g(s) = h((1-s)a+sb))$ é limite uniforme, $g(s) = \lim_{n\to\infty} p_n(s)$, de polinômios p_n. Logo

$$h(t) = g\left(\frac{t-a}{b-a}\right) = \lim_{n\to\infty} p_n\left(\frac{t-a}{b-a}\right)$$

também é limite da seqüência de polinômios $q_n(t) = p_n((t-a)/(b-a))$, a convergência sendo uniforme para $a \le t \le b$.

O Teorema de Aproximação de Weierstrass tem um complemento importante para funções deriváveis. Diremos que uma função $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é de *classe* C^k, e escreveremos $f \in C^k$, quando f possui derivadas sucessivas $f^{(i)}$ até a ordem k, em todos os pontos $x \in [a,b]$, sendo todas essas derivadas funções contínuas no intervalo $[a,b]$. Por extensão, diremos que f é de *classe* C^0, e escreveremos $f \in C^0$, para significar que f é contínua. Põe-se também $f^{(0)} = f$.

A forma mais precisa do Teorema de Weierstrass é dada pela

Proposição 19. *Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^k. Existe uma seqüência de polinômios p_n tais que, para $0 \le i \le k$, tem-se $\lim_{n\to\infty} p_n^{(i)}(x) = f^{(i)}(x)$ uniformemente em $[a,b]$.*

Demonstração. Basta considerar o caso em que se tem $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, com $f(0) = f(1) = 0$. Temos $f = \lim p_n$, onde

$$p_n(x) = \int_{-1}^{+1} f(x+t)\varphi_n(t)\,dt.$$

Derivando em relação a x, segue-se que $p_n'(x) = \int_{-1}^{+1} f'(x+t)\varphi_n(t)\,dt$ e daí, como na Proposição 18, concluímos que $\lim_{n\to\infty} p_n' = f'$ uniformemente em $[0,1]$. E assim também para as derivadas de ordem superior.

Com modificações evidentes na demonstração, o Teorema de Aproximação de Weierstrass, em sua forma mais completa, como na Proposição 19, vale ainda para funções reais de várias variáveis.

Explicitamente: seja $C = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_m, b_m]$ um paralelepípedo compacto no espaço euclidiano $\mathbb{R}^m$. Dada uma função contínua $f \colon C \to \mathbb{R}$, existe uma seqüência de polinômios a m variáveis que converge uniformemente para f em C. Se f possui todas as derivadas parciais mistas até a ordem k e elas são contínuas em C, então as derivadas desses polinômios também convergem uniformemente em C para as derivadas correspondentes de f.

A modificação a fazer na demonstração anterior para adaptá-la a m variáveis consiste em tomar $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $t = (t_1, \ldots, t_m)$, $K = [-1, +1]^m$

$$\text{pôr} \quad \varphi_n(t) = \frac{1}{c_n} \prod_{i=1}^{m} (1 - t_i^2)^n,$$

onde c_n é escolhido de tal modo que $\int_K \varphi_n = 1$, e

$$p_n(x) = \int_K f(x+t)\varphi_n(t)\, dt.$$

A segunda demonstração que daremos do Teorema de Aproximação de Weierstrass é devida a H. Lebesgue (1897). Ela se baseia nas sequintes observações: toda função contínua num intervalo compacto pode ser uniformemente aproximada por poligonais; toda poligonal é combinação linear de funções do tipo $|x - a|$; a função valor absoluto é limite uniforme de polinômios. Passemos à exposição sistemática, na qual seguiremos a ordem inversa dessas considerações.

Lema A. *Existe uma seqüência de polinômios p_n tais que $\lim_{n\to\infty} p_n(t) = \sqrt{t}$ uniformemente para $t \in [0, 1]$.*

Demonstração. Tomaremos $p_0 = 0$ e, supondo definidos os polinômios $p_0, p_1, \ldots, p_n$, poremos

$$p_{n+1}(t) = p_n(t) + \frac{1}{2}\,[t - p_n(t)^2].$$

Vamos provar que $p_n(t) \leq \sqrt{t}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $t \in [0, 1]$. Isto será feito por indução. Dado $t \in [0, 1]$, considere a função

$f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x + (t - x^2)/2$. Como $f(0) = t/2$, $f'(x) = 1 - x \geq 0$ e $f(\sqrt{t}) = \sqrt{t}$, vemos que f é uma bijeção crescente de $[0, \sqrt{t}]$ sobre $[t/2, \sqrt{t}]$. Em particular, $0 \leq x \leq \sqrt{t} \Rightarrow f(x) \leq \sqrt{t}$. Como $p_{n+1}(t) = f(p_n(t))$, segue-se que $p_n(t) \leq \sqrt{t} \Rightarrow p_{n+1}(t) \leq \sqrt{t}$. Logo esta desigualdade é válida para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $t \in [0,1]$. Portanto $p_n(t)^2 \leq t$ e daí $p_n(t) \leq p_{n+1}(t) \leq \sqrt{t}$ para $n \in \mathbb{N}$ e $t \in [0,1]$ quaisquer. Existe pois $\varphi(t) = \lim_{n\to\infty} p_n(t)$ para todo $t \in [0,1]$. Fazendo $n \to \infty$ na relação que define p_{n+1} indutivamente em termos de p_n obtemos $\varphi(t) = \varphi(t) + [t - \varphi(t)^2]/2$, donde $\varphi(t) = \sqrt{t}$, se $0 \leq t \leq 1$. A uniformidade da convergência resulta do Teorema de Dini. (Vide Proposição 0.)

Lema B. *Em qualquer intervalo compacto $[a,b]$, a função $f(x) = |x|$ pode ser uniformemente aproximada por polinômios.*

Demonstração. Não há perda de generalidade em supor que o intervalo dado é da forma $[-a, a]$, com $a > 0$, pois todo intervalo compacto está contido num desse tipo. Em seguida, podemos supor que $a = 1$, pois se $\lim p_n(t) = |t|$ uniformemente para $t \in [-1,1]$ então os polinômios $q_n(t) = a \cdot p_n(t/a)$ são tais que $\lim_{n\to\infty} q_n(t) = a \cdot |t|/a = |t|$ uniformemente para $t \in [-a, a]$. Finalmente, seja (p_n) uma seqüência de polinômios convergindo uniformemente para $\sqrt{t}$ em $[0,1]$. Então $q_n(t) = p_n(t^2)$ define uma seqüência de polinômios que converge uniformemente para $\sqrt{t^2} = |t|$ quando $t \in [-1,1]$.

Observação. Os polinômios p_n, tais que $\lim_{n\to\infty} p_n(x) = |x|$ uniformemente em $[a,b]$, são desprovidos de termo constante, isto é, vale $p_n(0) = 0$ para todo n, como se vê pelas demonstrações dos Lemas A e B.

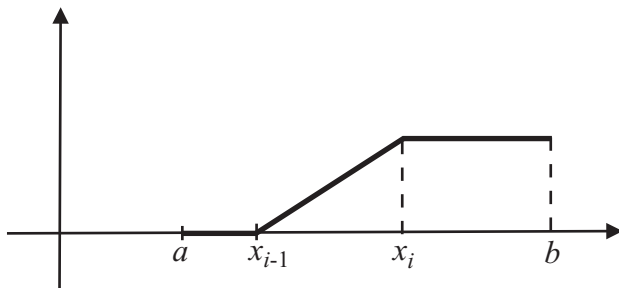
De um modo geral, se $0 \in [a,b]$ e $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é tal que $f(0) = 0$, dada uma seqüência de polinômios p_n com $\lim p_n(x) = f(x)$ uniformemente em $[a,b]$, pondo $c_n = p_n(0)$ temos $\lim c_n = 0$. Logo, se escrevermos $q_n(x) = p_n(x) - c_n$ para todo n, veremos que os polinômios q_n são desprovidos de termo constante (isto é, $q_n(0) = 0$) e continuamos a ter $\lim_{n\to\infty} q_n(x) = f(x)$ uniformemente em $[a,b]$.

Uma função $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ chama-se *linear* quando é da forma $f(x) = \alpha x + \beta$, onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ são constantes. O gráfico de f é portanto um segmento de reta não-vertical.

Uma função contínua $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ chama-se *poligonal* quando existe uma partição $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ do seu intervalo de definição tal que, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, $f|[x_{i-1}, x_i]$ é linear. O gráfico de f é uma linha poligonal cujos lados não são verticais.

Uma função poligonal $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ fica inteiramente determinada pelos valores $y_i = f(x_i)$ que ela assume nos pontos $x_0 = a$, $x_1, \ldots, x_n = b$ de subdivisão do intervalo $[a,b]$. Estes valores determinam os *vértices* (x_i, y_i) da linha poligonal que constitui o gráfico de f.

O exemplo mais simples de função poligonal não-linear é dado por $f(x) = |x|$ num intervalo contendo 0.

Outro tipo simples de função poligonal não-linear é o que chamaremos de *rampa*. Trata-se de uma função contínua $f_i\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, com $a \leq x_{i-1} < x_i \leq b$, tal que f é zero no intervalo $[a, x_{i-1}]$, linear em $[x_{i-1}, x_i]$ e constante em $[x_i, b]$. O gráfico de uma rampa tem a forma esboçada na figura abaixo.

Verifica-se imediatamente que se $f_i\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma rampa tal que $f_i(x) = \alpha_i(x - x_{i-1})$ para $x \in [x_{i-1}, x_i]$ então

$$(*) \qquad f_i(x) = \frac{\alpha_i}{2}\,(x_i - x_{i-1} + |x - x_{i-1}| - |x - x_i|)$$

para todo x.

É claro que toda função poligonal $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ se exprime, de modo único como soma da constante $f(a)$ mais um número finito de rampas, a saber, as rampas que no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ são paralelas ao lado correspondente do poligonal f. Daí resulta o

Lema C. *Toda função poligonal $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ pode ser uniformemente aproximada por polinômios.*

Demonstração. Basta notar que toda rampa é limite uniforme de polinômios, o que resulta diretamente do Lema B, conforme a expressão (*) acima.

O Teorema de Aproximação de Weierstrass decorre então do lema acima, juntamente com o seguinte.

Lema D. *Toda função contínua $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ pode ser uniformemente aproximada por funções poligonais.*

Demonstração. Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, a continuidade uniforme de f assegura a existência de uma partição $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ tal que se x, y pertencem ao mesmo intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ da partição então $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$. Seja $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ a função cujo gráfico é a poligonal com vértices nos pontos $(x_i, f(x_i))$. Em outras palavras $g(x_i) = f(x_i)$ e g é linear em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Dado $x \in [a,b]$, tem-se $x \in [x_{i-1}, x_i]$ para algum i. Então

$$|g(x) - f(x)| \leq |g(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x)| \leq |f(x_{i-1}) - f(x_i)| + \\ + |f(x_i) - f(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

[A desigualdade $|g(x) - f(x_i)| \leq |f(x_{i-1}) - f(x_i)|$ resulta de $g(x)$ pertencer ao intervalo cujos extremos são $f(x_{i-1})$ e $f(x_i)$.]

O tipo de argumento usado na demonstração de Lebesgue não se presta para concluir a convergência das derivadas dos polinômios aproximadores, no caso em que f é de classe C^k. Além disso, ele perde muito de sua simplicidade no caso de duas variáveis e se torna extremamente complicado para três ou mais variáveis. Entretanto, uma profunda e criadora análise das razões que o fazem funcionar, levou M. Stone (1937) a obter uma generalização do Teorema de Aproximação de Weierstrass, que se aplica a espaços compactos arbitrários.

Seja M um espaço métrico compacto. O conjunto $\mathcal{C}(M;\mathbb{R})$ de todas as funções reais contínuas $f\colon M \to \mathbb{R}$ é um espaço vetorial, no qual consideraremos a norma $||f|| = \sup\{|f(x)|; x \in M\}$. Além disso, $\mathcal{C}(M;\mathbb{R})$ possui uma multiplicação. O produto de duas funções $f, g \in \mathcal{C}(M;\mathbb{R})$ é a função $f \cdot g \in \mathcal{C}(M;\mathbb{R})$, definida por $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ para todo $x \in M$. Esta multiplicação é comutativa, associativa, distributiva em relação à adição e a função constante igual a 1 é elemento neutro para a multiplicação: $1 \cdot f = f$ para toda $f \in \mathcal{C}(M;\mathbb{R})$.

Um subconjunto $A \subset \mathcal{C}(M;\mathbb{R})$ chama-se *álgebra de funções reais contínuas*, ou uma *subálgebra de* $\mathcal{C}(M;\mathbb{R})$ quando é um subespaço vetorial e $f, g \in A \Rightarrow f \cdot g \in A$.

Exemplos de subálgebras de $\mathcal{C}(M;\mathbb{R})$ são o conjunto $\{0\}$ formado pela função identicamente nula e o próprio espaço $\mathcal{C}(M;\mathbb{R})$. Também o conjunto das funções constantes $M \to \mathbb{R}$ constitui uma álgebra de funções reais contínuas. Os polinômios $p\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ e as funções deriváveis $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ constituem, por sua vez, subálgebras de $\mathcal{C}([a,b];\mathbb{R})$.

Podemos também considerar funções contínuas complexas $f\colon M \to \mathbb{C}$. Para todo $x \in M$, temos $f(x) = u(x) + i \cdot v(x)$, onde $u(x), v(x) \in \mathbb{R}$. Isto define as funções contínuas $u, v\colon M \to \mathbb{R}$, chamadas respectivamente a *parte real* e a *parte imaginária* da função complexa f. Escreve-se $u = \operatorname{Re} f$ e $v = \operatorname{Im} f$. Se $A \subset \mathcal{C}(M;\mathbb{C})$ é uma álgebra de funções contínuas complexas, poremos $\operatorname{Re} A = \{\operatorname{Re} f; f \in A\}$ e $\operatorname{Im} A = \{\operatorname{Im} f; f \in A\}$.

Indiquemos com $\overline{z} = x - iy$ o conjugado do número complexo $z = x + iy$. Analogamente, dada $f\colon M \to \mathbb{C}$, definiremos a função conjugada $\overline{f}\colon M \to \mathbb{C}$ pondo $\overline{f}(x) = \overline{f(x)}$ = conjugado do número complexo $f(x)$, para todo $x \in M$.

Diremos que uma álgebra $A \subset \mathcal{C}(M;\mathbb{C})$ é *auto-adjunta* quando $f \in A \Rightarrow \overline{f} \in A$.

Por exemplo, a álgebra dos polinômios complexos não é auto-adjunta porque z é um polinômio mas $\overline{z}$ não é.

Por outro lado, a subálgebra $A_0 \subset \mathcal{C}(S^1;\mathbb{C})$ formada pelas funções $f\colon S^1 \to \mathbb{C}$ do tipo $f(z) = \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k z^k$ é auto-adjunta. Basta lembrar que $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ e que para $z \in S^1$, tem-se $\overline{z} = z^{-1}$, donde z^{-k} é o conjugado de z^k.

As fórmulas $\operatorname{Re} f = (f + \overline{f})/2$, $\operatorname{Im} f = (f - \overline{f})/2$ mostram que se $A \subset \mathcal{C}(M;\mathbb{C})$ é uma subálgebra auto-adjunta então $\operatorname{Re} A$ e $\operatorname{Im} A$ são álgebras de funções reais contínuas.

Por exemplo, seja $A_1 \subset \mathcal{C}([0,2\pi];\mathbb{C})$ a álgebra formada pelas funções $f\colon [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ da forma

$$f(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx},\ m \in \mathbb{N},\ x \in [0,2\pi],\ c_k = a_k + ib_k\,.$$

Evidentemente, a álgebra A_1 é auto-adjunta.

Como $e^{ikx} = \cos kx + i \operatorname{sen} kx$, vemos que

$$\operatorname{Re} f = \sum_{k=-n}^{n} a_k \cos kx - b_k \operatorname{sen} kx = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos kx + \beta_k \operatorname{sen} kx,$$

onde $\alpha_0 = a_0$ e $\alpha_k = a_k + a_{-k}$, $\beta_k = b_{-k}$ se $1 \leq k \leq n$. Concluímos que o conjunto das funções $q\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, que têm a forma

$$q(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos kx + \beta_k \operatorname{sen} kx$$

e são chamadas *polinômios trigonométricos*, constitui uma álgebra de funções reais contínuas no intervalo $[0, 2\pi]$.

Como $f(0) = f(2\pi)$ para todo $f \in A_1$, as funções pertencentes à álgebra A_1 podem ser identificadas com funções contínuas no círculo unitário S^1 do plano e portanto podemos considerar $A_1 = A_0 \subset \mathcal{C}(S^1; \mathbb{C})$. (Vide Exemplo 6, §2.)

Analogamente, os polinômios trigonométricos podem ser tomados como uma subálgebra de $\mathcal{C}(S^1; \mathbb{R})$.

A interseção de uma família qualquer de subálgebras $A_\lambda \subset \mathcal{C}(M; \mathbb{R})$ é uma álgebra $A = \cap A_\lambda$ de funções contínuas em M.

Dado qualquer conjunto $S \subset \mathcal{C}(M; \mathbb{R})$, existem subálgebras de $\mathcal{C}(M; \mathbb{R})$ contendo S, pelo menos $\mathcal{C}(M; \mathbb{R})$ é uma delas.

A interseção $A(S)$ de todas as subálgebras de $\mathcal{C}(M; \mathbb{R})$ que contêm S chama-se a *subálgebra gerada por* S.

$A(S)$ é a menor subálgebra de $\mathcal{C}(M; \mathbb{R})$ que contém S e é formada pelos "polinômios sem termo constante nas funções de S", isto é, por todas as combinações lineares com coeficientes em $\mathbb{R}$ dos produtos $f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n$, onde cada $f_i \in S$.

Com efeito, toda álgebra A de funções contínuas em M que contenha S deverá conter também os produtos $f_{i_1} \cdot f_{i_2} \cdot \ldots \cdot f_{i_n}$ de funções de S e portanto conterá todos os polinômios sem termo constante $\Sigma\, a_{i_1 i_2 \ldots i_n} f_{i_1} \cdot f_{i_2} \cdot \ldots \cdot f_{i_n}$ nas funções de S. Reciprocamente, esses polinômios constituem uma álgebra, que obviamente contém S e portanto contém $A(S)$. Assim sendo, $A(S)$ é o conjunto dos polinômios sem termo constante nas funções $f \in S$.

Por exemplo, a subálgebra de $\mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R})$ gerada pelo conjunto $S = \{1, x\}$ é a álgebra de todos os polinômios. Por outro lado, a

subálgebra gerada por $S' = \{x\}$ é formada pelos polinômios sem termo constante e a subálgebra gerada por $S'' = \{1, x^2\}$ é o conjunto dos polinômios pares (isto é, nos quais só comparecem potências de x com expoentes pares). Finalmente, dada $f: M \to \mathbb{R}$ contínua, a subálgebra de $\mathcal{C}(M;\mathbb{R})$ gerada por f é o conjunto dos "polinômios em f sem termo constante", isto é, das funções do tipo $g(x) = a_1 f(x) + a_2 \cdot f(x)^2 + \cdots + a_n \cdot f(x)^n$. Tem-se $g = p \circ f$ onde $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um polinômio sem termo constante, dado por $p(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$.

O fecho de um subconjunto $S \subset \mathcal{C}(M;\mathbb{R})$ é formado pelas funções contínuas $f: M \to \mathbb{R}$ que são limites uniformes de seqüências de funções $f_n \in S$.

Ora, se $f_n \to f$ e $g_n \to g$ uniformemente no espaço métrico compacto M então (para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ quaisquer), $\alpha f_n + \beta g_n \to \alpha f + \beta g$ e $f_n \cdot g_n \to f \cdot g$ uniformemente em M. (Quanto ao produto, note que f e g são limitadas, em virtude da compacidade de M, e use o Exemplo 16, Capítulo 5.)

Logo, se $A \subset \mathcal{C}(M;\mathbb{R})$ é uma álgebra de funções contínuas no espaço compacto M, seu fecho $\overline{A}$ também é uma álgebra.

Usaremos as seguintes notações:

Dada $f: M \to \mathbb{R}$, $|f|$ é a função de M em $\mathbb{R}$ definida por $|f|(x) = |f(x)|$. Se f é contínua, $|f|$ também é.

Dadas $f, g: M \to \mathbb{R}$, $f \vee g$ e $f \wedge g$ são as funções de M em $\mathbb{R}$ definidas por $(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ e $(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ para todo $x \in M$. Se f e g forem contínuas, $f \vee g$ e $f \wedge g$ também serão.

É imediato que $(f \vee g) \vee h = f \vee (g \vee h)$ e $(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h)$. Portanto, os símbolos $f_1 \vee f_2 \vee \ldots \vee f_n$ e $f_1 \wedge f_2 \wedge \ldots \wedge f_n$ são definidos sem ambigüidade.

Dadas $f, g: M \to \mathbb{R}$ contínuas, indicaremos com $A(f)$ e $A(f, g)$ respectivamente as subálgebras de $\mathcal{C}(M;\mathbb{R})$ geradas por $\{f\}$ e por $\{f, g\}$. Significado análogo tem o símbolo $A(f_1, \ldots, f_n)$.

Lema I. *Sejam $f, g: M \to \mathbb{R}$ funções contínuas no espaço métrico compacto M. Então $|f| \in \overline{A(f)}$, $f \vee g \in \overline{A(f, g)}$ e $f \wedge g \in \overline{A(f, g)}$. Conseqüentemente, se $A \subset \mathcal{C}(M;\mathbb{R})$ é uma subálgebra e $f, f_1, \ldots, f_n \in A$ então $|f| \in \overline{A}$, $f_1 \vee \cdots \vee f_n \in \overline{A}$ e $f_1 \wedge \cdots \wedge f_n \in \overline{A}$.*

Demonstração. Sejam $a = \inf\{f(x); x \in M\}$, $b = \sup\{f(x);$

$x \in M\}$ e $p_n \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ uma seqüência de polinômios desprovidos de termo constante, com $\lim\limits_{n\to\infty} p_n(x) = |x|$ uniformemente em $[a, b]$. Então $\lim\limits_{n\to\infty} p_n(f(x)) + |f(x)|$ uniformemente em M. Como p_n não tem termo constante, cada função $p_n \circ f$ pertence à subálgebra gerada por f. Segue-se que $|f| \in \overline{A(f)}$. Daí resulta que $|f - g| \in \overline{A(f - g)} \subset \overline{A(f, g)}$. Como

$$f \vee g = \frac{1}{2}\,[f + g + |f - g|] \quad \text{e} \quad f \wedge g = \frac{1}{2}\,[f + g - |f - g|],$$

concluímos que $f \vee g \in \overline{A(f, g)}$ e $f \wedge g \in \overline{A(f, g)}$. Se A é uma subálgebra de $\mathcal{C}(M; \mathbb{R})$ e $f, f_1, \ldots, f_n \in A$ então $A(f) \subset A$ e $A(f_1, \ldots, f_n) \subset A$. Logo $|f| \in \overline{A}$, $f_1 \vee \ldots \vee f_n \in \overline{A}$ e $f_1 \wedge \ldots \wedge f_n \in \overline{A}$.

Diz-se que um conjunto $S \subset \mathcal{C}(M; \mathbb{R})$ *separa os pontos de* M quando, dados arbitrariamente $x \neq y$ em M, existe $f \in S$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

Por exemplo o conjunto formado pela função identidade, $S = \{x\}$ separa os pontos de um intervalo $[a, b]$. Por outro lado, o subconjunto $S \subset \mathcal{C}([0, 2\pi]; \mathbb{R})$ formado pelos polinômios trigonométricos não separa os pontos do intervalo 2π. Com efeito, $p(0) = p(2\pi)$ para todo polinômio trigonométrico p.

Lema II. *Seja $A \subset \mathcal{C}(M; \mathbb{R})$ uma subálgebra que separa pontos e contém as (funções) constantes. Dados arbitrariamente $x \neq y$ em M e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, existe $f \in A$ tal que $f(x) = \alpha$ e $f(y) = \beta$.*

Demonstração. Dados $x \neq y$, como A separa pontos, existe $g \in A$ tal que $g(x) \neq g(y)$. Procuremos determinar números reais s, t tais que

$$\begin{cases} s \cdot g(x) + t = \alpha \\ s \cdot g(y) + t = \beta. \end{cases}$$

Ora, o sistema de 2 equações acima, nas duas incógnitas s e t, possui solução única porque seu determinante é $g(x) - g(y) \neq 0$. Obtidos os números s, t, definamos a função $f \colon M \to \mathbb{R}$ pondo $f = s \cdot g + t$. Como g e a função constante t pertencem a A, vemos que $f \in A$ e, em virtude das equações acima, $f(x) = \alpha$, $f(y) = \beta$.

Teorema de Stone-Weierstrass. *Sejam M um espaço métrico compacto e $A \subset \mathcal{C}(M; \mathbb{R})$ uma álgebra de funções contínuas que*

contém as constantes e separa pontos. Então $\overline{A} = \mathcal{C}(M;\mathbb{R})$, isto é, toda função contínua $f\colon M \to \mathbb{R}$ pode ser uniformemente aproximada por funções pertencentes a A.

Demonstração. Basta mostrar que para toda $f \in \mathcal{C}(M;\mathbb{R})$ e todo $\varepsilon > 0$ existe $g \in \overline{A}$ tal que $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ qualquer que seja $x \in M$. Dados arbitrariamente $x, y \in M$, existe $g_{xy} \in A$ tal que $g_{xy}(x) = f(x)$ e $g_{xy}(y) = f(y)$. Isto decorre do Lema II se $x \neq y$, e é óbvio (basta tomar g_{xy} constante) se $x = y$. Por continuidade, para cada $x \in M$, cada ponto $y \in M$ possui uma vizinhança V_{xy} tal que $z \in V_{xy} \Rightarrow g_{xy}(z) > f(z) - \varepsilon$. Sendo M compacto, existem $y_1, y_2, \ldots, y_n \in M$ tais que $M = V_{xy_1} \cup \cdots \cup V_{xy_m}$. Seja $g_x = g_{xy_1} \vee g_{xy_2} \vee \cdots \vee g_{xy_n}$. Então $g_x \in \overline{A}$, $g_x(x) = f(x)$ e $f(z) - \varepsilon < g_x(z)$ para todo $z \in M$. Por continuidade, cada ponto $x \in M$ possui uma vizinhança U_x tal que $z \in U_x \Rightarrow g_x(z) < f(z) + \varepsilon$. Sendo M compacto, existem $x_1, x_2, \ldots, x_m \in M$ tais que $M = U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_m}$. Seja $g = g_{x_1} \wedge g_{x_2} \wedge \cdots \wedge g_{x_m}$. Então $g \in \overline{A}$ e, para cada $z \in M$, tem-se $f(z) - \varepsilon < g(z) < f(z) + \varepsilon$, ou seja $|f(z) - g(z)| < \varepsilon$. Isto conclui a demonstração.

Corolário. *Sejam M um espaço métrico compacto e $S \subset \mathcal{C}(M;\mathbb{R})$ um conjunto que separa pontos. Toda função contínua $f\colon M \to \mathbb{R}$ pode ser uniformemente aproximada por polinômios nas funções de S.*

Com efeito, os polinômios nas funções de S constituem uma subálgebra $A \subset \mathcal{C}(M;\mathbb{R})$, que contém S e portanto separa os pontos de M. Note que os polinômios a que nos estamos referindo podem ter termos constantes, de modo que A contém as funções constantes e pode conter propriamente a subálgebra $A(S)$, gerada por S. O Teorema de Stone-Weierstrass assegura, então, que A é densa em $\mathcal{C}(M;\mathbb{R})$ e isto demonstra o corolário.

Observação. O corolário acima é equivalente ao Teorema de Stone-Weierstrass.

O Teorema de Aproximação de Weierstrass resulta do Teorema de Stone-Weierstrass. Com efeito, o subconjunto $S \subset \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R})$ cujo único elemento é a função identidade, x, separa os pontos de $[a,b]$. Os polinômios nas funções de S são simplesmente os polinômios usuais $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$. O corolário acima

nos diz então que toda função real contínua $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ pode ser uniformemente aproximada por polinômios.

Mais geralmente, dado um subconjunto compacto arbitrário $X \subset \mathbb{R}^m$, seja $S \subset \mathcal{C}(X;\mathbb{R})$ o conjunto formado pelas m projeções $p_i\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $p_i(x) = x_i$. É óbvio que S separa os pontos de X. Os polinômios nas funções de S são precisamente os polinômios comuns a m variáveis reais. Logo, toda função contínua $f\colon X \to \mathbb{R}$, definida no compacto $X \subset \mathbb{R}^m$ pode ser uniformemente aproximada por polinômios a m variáveis.

Os polinômios trigonométricos $p\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}$, dados por

$$p(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kt + b_k \operatorname{sen} kt,$$

constituem uma subálgebra de $\mathcal{C}([0,2\pi];\mathbb{R})$, a qual contém as constantes mas não separa pontos porque $p(0) = p(2\pi)$ para todo polinômio trigonométrico p. Mas, salvo no caso em que $x = 0$ e $y = 2\pi$, se $x \neq y$ em $[0,2\pi]$, existe um polinômio trigonométrico p tal que $p(x) \neq p(y)$. Basta tomar $p(t) = \cos t$ ou $p(t) = \operatorname{sen} t$.

Isto nos indica a possibilidade de que toda função contínua $f\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ tal que $f(0) = f(2\pi)$ seja limite uniforme de uma seqüência de polinômios trigonométricos. Este fato é verdadeiro, como mostraremos agora.

Com efeito, para cada polinômio trigonométrico p (e, mais geralmente, para toda função contínua em $[0,2\pi]$ que assume valores iguais nos extremos 0 e 2π) existe uma única função contínua $\widetilde{p}\colon S^1 \to \mathbb{R}$ tal que $\widetilde{p}(e^{it}) = p(t)$. Identificando p com $\widetilde{p}$, conceberemos os polinômios trigonométricos como funções contínuas definidas no círculo S^1. (Vide Exemplo 6, §2.) Eles constituem uma subálgebra de $\mathcal{C}(S^1;\mathbb{R})$, a qual contém as constantes; basta tomar $a_k = b_k = 0$ para todo $k \geq 1$. Além disso, esta álgebra separa os pontos em S^1. (Essencialmente, isto se dá porque, em S^1, $0 = 2\pi$!)

Com efeito, se $e^{ia} \neq e^{ib}$ com $a, b \in [0,2\pi]$, então $\cos a \neq \cos b$ ou $\operatorname{sen} a \neq \operatorname{sen} b$. Considerados os polinômios trigonométricos $p(t) = \cos t$ e $q(t) = \operatorname{sen} t$, temos $p(a) \neq p(b)$ ou $q(a) \neq q(b)$, ou seja: $\widetilde{p}(e^{ia}) \neq \widetilde{p}(e^{ib})$ ou $\widetilde{q}(e^{ia}) \neq \widetilde{q}(e^{ib})$.

Pelo Teorema de Stone-Weierstrass, concluímos que a subálgebra dos polinômios trigonométricos é densa em $\mathcal{C}(S^1;\mathbb{R})$. Em outras

palavras, toda função contínua $f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ tal que $f(0) = f(2\pi)$ pode ser uniformemente aproximada por polinômios trigonométricos.

É natural perguntar se existe uma versão do Teorema de Stone-Weierstrass para funções com valores complexos. De início convém observar que o disco unitário $\overline{U} = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$ é compacto, que o conjunto A dos polinômios complexos $p\colon \overline{U} \to \mathbb{C}$ é uma subálgebra de $\mathcal{C}(\overline{U}; \mathbb{C})$ que separa os pontos de $\overline{U}$ e contém as constantes mas, por um teorema clássico da teoria das funções de variável complexa, toda função $f\colon \overline{U} \to \mathbb{C}$ que pode ser uniformemente aproximada por polinômios é holomorfa em $U = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$. Portanto A não é densa em $\mathcal{C}(\overline{U}; \mathbb{C})$.

Para que uma álgebra A de funções contínuas complexas $f\colon M \to \mathbb{C}$ seja densa em $\mathcal{C}(M; \mathbb{C})$ é preciso supor algo mais além de A separar pontos e conter as constantes. Esta hipótese adicional é ser auto-adjunta.

Forma complexa do Teorema de Stone-Weierstrass. *Sejam M um espaço métrico compacto e $A \subset \mathcal{C}(M; \mathbb{C})$ uma subálgebra auto-adjunta que contém as constantes e separa os pontos de M. Então toda função contínua complexa $f\colon M \to \mathbb{C}$ pode ser uniformemente aproximada por funções pertencentes a A.*

Demonstração. Como A é auto-adjunta, vemos que $\operatorname{Re} A = \{\operatorname{Re} f; f \in A\}$ e $\operatorname{Im} A = \{\operatorname{Im} f; f \in A\}$ são subconjuntos de A, os quais constituem, como sabemos, álgebras de funções reais. Evidentemente, $\operatorname{Re} A$ e $\operatorname{Im} A$ contêm as constantes. Mostremos agora que a subálgebra $\operatorname{Re} A \subset \mathcal{C}(M; \mathbb{R})$ separa pontos.

Dados $x \neq y$ em M, como A separa pontos, existe $f = u + iv \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$. Logo $u(x) \neq u(y)$ ou $v(x) \neq v(y)$. Se ocorrer o primeiro caso, como $u \in \operatorname{Re} A$, vemos que $\operatorname{Re} A$ separa os pontos x, y. Se for, porém, $v(x) \neq v(y)$, basta observar que v é a parte real da função $g = -i \cdot f \in A$, logo $v \in \operatorname{Re} A$. De maneira análoga mostraríamos que a subálgebra $\operatorname{Im} A \subset \mathcal{C}(M; \mathbb{R})$ também separa pontos. Pelo Teorema de Stone-Weierstrass (real) concluímos então que $\operatorname{Re} A$ e $\operatorname{Im} A$ são densas em $\mathcal{C}(M; \mathbb{R})$.

Assim, dada qualquer função complexa contínua $f = u + iv \in \mathcal{C}(M; \mathbb{C})$, existem seqüências de funções $u_n \in \operatorname{Re} A \subset A$ e $v_n \in \operatorname{Im} A \subset A$ tais que $u_n \to u$ e $v_n \to v$ uniformemente em M. Segue-

se que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n = u_n + iv_n \in A$, com $f_n \to f$ uniformemente em M.

Observação. Para toda subálgebra $A \subset \mathcal{C}(M;\mathbb{C})$, como $\operatorname{Re}(if) = \operatorname{Im}(-f)$, segue-se que $\operatorname{Re} A = \operatorname{Im} A$, mas este fato não simplificaria muito a demonstração acima.

Segue-se do Teorema de Stone-Weierstrass em forma complexa que toda função contínua $f\colon S^1 \to \mathbb{C}$ pode ser uniformemente aproximada por funções da forma $p(z) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \cdot z^k$, com $c_k \in \mathbb{C}$. Se f tomar valores reais, é claro que $p_n(z) \to f$ uniformemente em S^1 implica $\operatorname{Re} p_n(z) \to f$ uniformemente em S^1. Reobtemos assim o fato de que toda função contínua $f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ tal que $f(0) = f(2\pi)$ pode ser uniformemente aproximada por polinômios trigonométricos.

Observação. Na teoria das séries de Fourier obtém-se uma fórmula notável, devida a L. Fejér, que fornece explicitamente os coeficientes dos polinômios trigonométricos que aproximam f.

EXERCÍCIOS DO CAPÍTULO 8

§2

1. Sejam A, B subconjuntos disjuntos não-vazios no espaço métrico compacto M. Se $d(A, B) = 0$ então existe $p \in \partial A \cap \partial B$.
2. Sejam $K \subset U \subset \mathbb{R}^n$, onde K é compacto e U é aberto. Prove que existe $\varepsilon > 0$ tal que $x \in K$, $y \in U$ e $|x - y| < \varepsilon \Rightarrow [x, y] \subset U$.
3. Sejam $K \subset V \subset M$ onde K é compacto e V é aberto em M. Prove que existe $r > 0$ tal que $\bigcup_{x \in K} B(x, r) \subset V$.
4. Um espaço métrico compacto e localmente conexo possui um número finito de componentes conexas. Omitindo-se uma qualquer dessas duas hipóteses o resultado torna-se falso.
5. Indiquemos com $\#S$ o número cardinal do conjunto S. Dado $S \subset M$, o ponto $a \in M$ chama-se *ponto de condensação* do conjunto S quando, para cada vizinhançça V de a tem-se $\#(V \cap S) = \#S$. Prove que todo subconjunto infinito de um espaço métrico compacto possui um ponto de condensação.
6. Dada $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua, defina $\xi\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ pondo $\xi(x) = \inf\{f(s); x < s\}$. Prove que ξ é contínua e não-decrescente. Se $f|(a, b]$ for positiva então $0 < \xi(x) \leq f(x)$ para todo $x \in (a, b]$.

7. Sejam K, L espaços métricos compactos e $f\colon K \times L \to \mathbb{R}$ contínua. Para cada $y \in L$, ponha $\varphi(y) = \sup_{x \in K} f(x, y)$. Prove que $\varphi\colon L \to \mathbb{R}$, assim definida, é contínua.

8. Dada $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ contínua, seja $\varphi\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(r) = \sup_{|x|=r} f(x)$. Mostre que φ é contínua.

9. Uma família $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ de conjuntos chama-se uma *cadeia* quando, dados $\lambda, \mu \in L$ arbitrários, tem-se $F_\lambda \subset F_\mu$ ou $F_\mu \subset F_\lambda$. Prove que um espaço métrico M é compacto se, e somente se, toda cadeia de subconjuntos fechados não-vazios em M tem interseção não-vazia.

10. Sejam $K = \bigcap_{\lambda \in L} K_\lambda$ a interseção de uma família de compactos no espaço métrico M e U um aberto contendo K. Prove que existem $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in L$ tais que $K_{\lambda_1} \cap \cdots \cap K_{\lambda_n} \subset U$. Se a família (K_λ) for uma cadeia então $K \subset U \Rightarrow K_\lambda \subset U$ para algum λ. Se $K_1 \supset K_2 \supset \ldots$ e $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \subset U$ então existe n_0 tal que $n > n_0 \Rightarrow K_n \subset U$.

11. Em todo espaço métrico, a interseção de uma cadeia de compactos conexos é um conjunto conexo (e compacto).

12. Um espaço métrico compacto é conexo se, e somente se, dois quaisquer dos seus pontos são ε-encadeados para todo $\varepsilon > 0$.

13. Num espaço métrico compacto, a componente conexa de um ponto a é o conjunto dos pontos que são ε-encadeados a a para todo $\varepsilon > 0$.

14. Seja M um espaço métrico compacto. A fim de que dois pontos $a, b \in M$ pertençam a componentes conexas distintas de M, é necessário e suficiente que exista uma cisão $M = A \cup B$, com $a \in A$ e $b \in B$. Conclua que, num espaço métrico compacto, a componente conexa de um ponto é a interseção dos subconjuntos abertos-fechados que contêm o ponto.

15. Um espaço métrico M é compacto se, e somente se, toda função real contínua e positiva em M possui ínfimo positivo.

16. Seja M um espaço métrico compacto. Prove que toda função semicontínua inferiormente $f\colon M \to \mathbb{R}$ é limitada inferiormente e assume seu valor mínimo em algum ponto $x_0 \in M$. Enuncie resultado análogo para funções semicontínuas superiormente.

17. Seja $\varphi\colon M \to N$ uma aplicação quociente. Um conjunto $A \subset N$ é aberto se, e somente se, sua imagem inversa $\varphi^{-1}(A) \subset M$ é aberta. Conclua que se M é discreto então N também o é.

§5

18. Se M é totalmente limitado então toda aplicação uniformemente contínua $f\colon M \to N$ é limitada. Em particular, se $X \subset \mathbb{R}^n$ é limitado, $f\colon X \to N$ é uniformemente contínua $\Rightarrow f$ limitada.

19. Prove que um espaço métrico M é totalmente limitado se, e somente se, toda seqüência em M possui uma subseqüência de Cauchy.

20. Dada uma seqüência (x_n) no espaço métrico M, escreveremos $\lim x_n = \infty$ para indicar que (x_n) não possui subseqüência convergente em M. Dada $f\colon M \to N$ contínua, o *conjunto limite* de f é o conjunto $L(f) = \{y \in N; y = \lim f(x_n)$ onde $\lim x_n = \infty$ em $M\}$.

    (a) Tem-se $\lim x_n = \infty$ se, e somente se, para todo compacto $K \subset M$ o conjunto $\{n \in \mathbb{N}; x_n \in K\}$ é finito.

    (b) Seja $f\colon M \to N$ contínua e injetiva. A fim de que f seja um homeomorfismo de M sobre $f(M)$ é necessário e suficiente que $f(M) \cap L(f) = \varnothing$.

    (c) Seja $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ a aplicação de inclusão. Mostre que $L(f)$ é o conjunto dos números irracionais. Por outro lado, para a aplicação de inclusão $g\colon (0,1) \to \mathbb{R}$, tem-se $L(f) = \{0,1\}$.

    (d) Se M cumpre a condição (S) do §10, então, dada $f\colon M \to N$ contínua, temos $L(f) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{f(M - K_i)}$. Em particular, $L(f)$ é fechado em N, e não-vazio, caso N seja compacto e M não.

21. Na notação do exercício anterior, mostre que as seguintes condições a respeito de uma aplicação contínua $f\colon M \to N$ são equivalentes:

    (a) $L(f) = \varnothing$;

    (b) $\lim x_n = \infty$ em $M \Rightarrow \lim f(x_n) = \infty$ em N;

    (c) Para todo $K \subset N$ compacto, $f^{-1}(K)$ é um subconjunto compacto de M.

    Quando f cumpre uma destas condições (e portanto todas) diz-se que f é uma *aplicação própria*. Mostre que todo polinômio (real ou complexo) não-constante é uma aplicação própria. Se M é compacto, toda aplicação contínua $f\colon M \to N$ é própria.

22. Toda aplicação própria $f\colon M \to N$ transforma subconjuntos fechados de M em fechados de N.

23. Sejam M um espaço métrico completo, $k > 0$ e $f\colon M \to N$ contínua tal que $d(f(x), f(y)) \geq k \cdot d(x,y)$ para quaisquer $x, y \in M$. Prove que f é própria. Observe também que f é um homeomorfsimo de M sobre $f(M)$.

24. Seja $f\colon M \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação própria que é um homeomorfismo local. Mostre que $f(M) = \mathbb{R}^n$.

25. Uma aplicação contínua $f\colon M \to N$ é própria se, e somente se, cumpre as seguintes condições:

    (a) é fechada;

    (b) para cada ponto $y \in N$, $f^{-1}(y)$ é compacto.

26. Seja $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$ compacto e conexo. Se a projeção $\pi\colon K \to \mathbb{R}^n$, definida por $\pi(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_n)$ é um homeomorfismo local de K sobre $\pi(K)$ então π é, na realidade, um homeomorfismo entre K e $\pi(K)$. Mostre que a compacidade de K pode ser substituída pela condição de π ser uma aplicação própria de K sobre $\pi(K)$.

27. Seja M compacto. Uma seqüência de pontos $x_n \in M$ é convergente se, e somente se, possui um único valor de aderência. Mostre, por meio de exemplo, que a compacidade de M é hipótese necessária.

28. Se toda cobertura aberta infinita do espaço métrico M possui uma subcobertura própria (isto é, diferente da cobertura dada) então M é compacto.

29. Sejam $f, f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ aplicações contínuas de M em N. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

    (a) Se $x_n \to x$ em M então $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$.

    (b) $f_n \to f$ uniformemente em cada subconjunto compacto de M.

30. Seja M compacto. Se $f\colon M \to M$ é tal que $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ para quaisquer $x \neq y \in M$, então f possui um único ponto fixo $a \in M$, o qual é atrator (isto é, $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x) = a$ para todo $x \in M$).

31. Seja M um espaço métrico compacto. Se uma aplicação contínua $f\colon M \to M$ é tal que $d(f(x), f(y)) \geq d(x, y)$ para quaisquer $x, y \in M$ então f é um homeomorfismo de M sobre si mesmo. Em particular, toda imersão isométrica $f\colon M \to M$ é uma isometria de M sobre si mesmo. (Pelo Exerc. 33 não é preciso supor f contínua.)

32. Sejam M compacto e $f\colon M \to M$ tal que $d(f(x), f(y)) \geq d(x, y)$ para quaisquer $x, y \in M$. Prove que, para todo $x \in M$ existem $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \ldots$ inteiros positivos tais que $\lim\limits_{k\to\infty} f^{n_k}(x) = x$.

33. Sejam M compacto e $f\colon M \to M$ tal que $d(f(x), f(y)) \geq kd(x, y)$ para quaisquer $x, y \in M$. Prove que $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ para todo par de pontos $x, y \in M$.

    (*Sugestão*: suponha que existam $x, y \in M$ com $d(f(x), f(y)) > d(x, y)$. Usando o exercício anterior, obtenha $m_1 < m_2 < \cdots < m_k < \ldots$ tais que $\lim\limits_{k\to\infty} f^{m_k}(x) = x$ e $\lim\limits_{k\to\infty} f^{m_k}(y) = y$. Como $d(x, y) < d(f^{m_k}(x), f^{m_k}(y))$, chegue a uma contradição.)

34. Seja M um espaço métrico compacto e conexo. Dado um homeomorfismo $f\colon M \to M$, existe um par de pontos $a, b \in M$ tais que $a \neq b$ e $d(f(a), f(b)) = d(a, b)$.

35. Seja $f\colon M \to M$ contínua, onde M é um espaço métrico compacto. Prove que existe $X \subset M$ compacto não-vazio, tal que $f(X) = X$.

    (*Sugestão*: tome $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(M)$. É claro que $f(X) \subset X$. Por outro lado, dado $x \in X$, existe, para cada $n \in \mathbb{N}$, um $x_n \in M$ com $f^n(x_n) = x$. A seqüência $y_n = f^{n-1}(x_n)$ possui uma subseqüência convergindo para um ponto x'. Como $f(y_n) = x$ para todo n, segue-se $f(x') = x$. A seqüência $f^{n-2}(x_n) = z_n$ possui uma subseqüência que converge para um ponto x''. Como $f(z_n) = y_n$, segue-se que $f(x'') = x'$, donde $x' \in f(M)$. E assim sucessivamente, mostra-se que $x' \in f^n(M)$ para todo n, donde $x' \in X$. Logo $x = f(x') \in f(X)$.)

36. Diz-se que uma aplicação $f\colon M \to N$ é *localmente lipschitziana* quando existe uma cobertura de M por meio de abertos, em cada um dos quais f é lipschitziana. Mostre que se M for compacto, esta condição implica que f é lipschitziana.

37. Se $X \cap K$ é fechado em K para todo subconjunto compacto $K \subset M$, então X é um subconjunto fechado do espaço métrico M.

38. Prove as afirmações 1), 2) e 3) do Exemplo 16.

39. Seja (M, d) um espaço métrico tal que *toda* métrica equivalente a d torna M limitado. Então M é compacto. (*Sugestão*: tomar a métrica $d_f(x, y) = d(x, y) + |f(x) - f(y)|$, onde f é contínua e ilimitada.)

40. Seja E um espaço vetorial normado. A aplicação contínua $\varphi\colon E - \{0\} \to E - \{0\}$, definida por $\varphi(x) = x/|x|^2$, cumpre $\varphi \circ \varphi = \text{id}$ e $|x| \cdot |\varphi(x)| = 1$, logo é um homeomorfismo que transforma toda conjunto ilimitado $X \subset E - \{0\}$ num conjunto $\varphi(X)$ do qual a origem $0 \in E$ é aderente. Logo $\varphi(X)$ não é fechado em E. Conclua que todo subconjunto ilimitado $Y \subset E$ é homeomorfo a um subconjunto não-fechado $Y' \subset E$. Usando o fato de que todo espaço métrico é isométrico a um subconjunto de um espaço vetorial normado, mostre que um espaço métrico (M, d) é compacto se, e somente se, é completo em relação a toda métrica equivalente a d.

§6

41. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n; \langle x, x\rangle < 1\}$. Prove que $B^m \times B^n$ é homeomorfo a B^{m+n}.

42. Sejam $B_1, B_2, \ldots, B_i, \ldots$ bolas fechadas no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Para cada $i \in \mathbb{N}$, seja $(x_{in})_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de pontos em B_i. Prove que existe um subconjunto infinito $S \subset \mathbb{N}$ tal que, para cada $i \in \mathbb{N}$ a subseqüência $(x_{in})_{n\in S}$ converge para algum ponto de B_i.

43. Sejam $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$ espaços métricos, uma infinidade dos quais são não compactos. Prove que todo subconjunto compacto $K \subset \prod_{n=1}^{\infty} M_n$ tem interior vazio.

44. O conjunto de Cantor C é um grupo metrizável. Em particular, C é topologicamente homogêneo.

45. Dados m, n arbitrários, existe uma aplicação contínua sobrejetiva $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. (A impossibilidade de obter uma aplicação contínua *injetiva* $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ quando $m > n$ é um teorema delicado, devido a L.E.J. Brouwer.)

§7

46. Dada uma função real contínua $f\colon X \to \mathbb{R}$, definida num subconjunto fechado $X \subset \mathbb{R}^m$, prove que existe $F\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ contínua tal que $F|X = f$. (Teorema de Tietze.) (*Sugestão*: para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $X_n = X \cap B[0; n]$. Usando o Exercício 8 do Capítulo 6, estenda sucessivamente f de $X_{n+1} \cup B[0, n]$ a $B[0, n+1]$.)

§8

47. Diz-se que o espaço métrico M é uniformemente localmente compacto quando existe $\varepsilon > 0$ tal que toda bola $B[x, \varepsilon]$ é compacta. Mostre que, nestas condições, M é completo.

48. Se toda parte limitada e fechada de um espaço métrico M é compacta então M é completo e localmente compacto.

49. Seja M um espaço métrico localmente compacto. Se $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ e cada F_n é compacto, então $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{int} F_n$ é um aberto denso em M.

50. Sejam M, N espaços métricos compactos. Se existem pontos $a \in M$ e $b \in N$ tais que $M - \{a\}$ e $N - \{b\}$ são homeomorfos, então M e N são homeomorfos. Mais precisamente, todo homeomorfismo $h\colon M - \{a\} \to N - \{b\}$ se estende a um homeomorfismo $\overline{h}\colon M \to N$. Mostre que isto seria falso com M compacto e N apenas localmente compacto.

51. Estenda o exercício anterior: se M, N são compactos e $M - \{a_1, \dots, a_k\}$ é homeomorfo a $N - \{b_1, \dots, b_k\}$, então M e N são homeomorfos.

52. Prove ou disprove: o conjunto dos números irracionais é localmente compacto.

53. Se $X \subset M$ é localmente compacto então X é localmente fechado em M. Por outro lado, se M é localmente compacto e $X \subset M$ é localmente fechado em M, então X é localmente compacto.

54. Dê exemplo de uma aplicação contínua $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(\mathbb{R})$ não seja localmente compacto. Mostre, porém, que se M for localmente compacto e $f\colon M \to N$ for contínua e aberta, então $f(M)$ é localmente compacto.

§9

55. Seja (p_n) uma seqüência de polinômios reais. Suponha que exista um número real $A > 0$ tal que, para cada n, o grau de p_n e os valores absolutos dos coeficientes de p_n são inferiores a A. Prove que existe uma subseqüência de (p_n) que converge para um polinômio p, a convergência sendo uniforme em cada parte limitada da reta.

56. Seja E um espaço de Banach de dimensão infinita. Todo subconjunto compacto de E tem interior vazio. Conclua que E não pode ser expresso como reunião enumerável de subconjuntos compactos e que nenhuma função contínua $f\colon \mathbb{R}^n \to E$ é sobrejetiva.

§10

57. Seja $E = \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R})$. Defina $T\colon E \to E$ pondo, para cada $f \in E$ e cada $x \in [a,b]$, $(T \cdot f)(x) = \int_a^b f(t)\,dt$. Prove que se (f_n) for uma seqüência limitada em E então $(T \cdot f_n)$ possui uma subseqüência uniformemente convergente em $[a,b]$.

58. Se a seqüência de funções diferenciáveis $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ converge simplesmente para a função $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ e existe $c > 0$ tal que $|f_n'(x)| \le c$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in [a,b]$ então f é contínua.

59. Sejam M e N espaços métricos arbitrários e $D \subset M$ um subconjunto denso. Dada uma seqüência eqüicontínua de aplicações $f_n\colon M \to N$ e uma aplicação contínua $f\colon M \to N$, suponha que $f_n \to f$ simplesmente em D. Prove que $f_n \to f$ uniformemente em cada parte compacta de M.

60. Sejam M conexo, N localmente compacto, completo e E um conjunto eqüicontínuo de aplicações de M em N. Se, para algum $x_0 \in M$, o conjunto $E(x_0)$ é relativamente compacto em N, então $E(x)$ é relativamente compacto para todo $x \in M$.

61. Sejam M, N espaços métricos. Prove que o fecho de um conjunto eqüicontínuo $E \subset \mathcal{C}_0(M;N)$ é eqüicontínuo. Idem para conjuntos uniformemente eqüicontínuos.

62. Se uma seqüência de aplicações $f_n\colon M \to N$ é eqüicontínua no ponto $x_0 \in M$ e converge simplesmente para $f\colon M \to N$, então f é contínua no ponto x_0.

63. Dada $f\colon M \times N \to P$ definamos, para cada $x \in M$ e cada $y \in N$, as aplicações $f_x\colon N \to P$ e $f_y\colon M \to P$, onde $f_x(y) = f_y(x) = f(x, y)$. Se cada f_x for contínua e o conjunto $E = \{f_y\,; y \in N\}$ for eqüicontínuo, prove que f é contínua.

§11

64. Seja $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se $\int_a^b f(x)x^n\,dx = 0$ para todo inteiro $n \geq 0$ então f é identicamente nula.

65. Seja $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $\int_a^b f(x)x^n\,dx = 0$ para todo $n \geq p$ então f é identicamente nula.

66. Seja $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Se uma seqüência de polinômios q_n converge uniformemente para f' no intervalo $[a, b]$ então $p_n(x) = f(a) + \int_a^x q_n(t)\,dt$ define uma seqüência de polinômios p_n tais que $p_n(x) \to f(x)$ e $p_n'(x) \to f'(x)$ uniformemente em $[a, b]$.

67. A subálgebra de $\mathcal{C}([0, 2\pi]; \mathbb{R})$ gerada por 1, $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ é o conjunto dos polinômios trigonométricos.
(*Sugestão*: reveja as identidades trigonométricas num livro de Cálculo.)

68. Seja M um espaço métrico compacto. Se um subconjunto $S \subset \mathcal{C}(M; \mathbb{R})$ é denso então S separa pontos.

69. Sejam M, N compactos. Toda função contínua $f\colon M \times N \to \mathbb{R}$ pode ser uniformemente aproximada por somas de funções do tipo $(x, y) \mapsto u(x) \cdot v(y)$, onde $u\colon M \to \mathbb{R}$ e $v\colon N \to \mathbb{R}$ são contínuas.

70. Sejam M compacto e $E \subset \mathcal{C}(M; \mathbb{R})$ um subespaço vetorial que contém as constantes, separa pontos e $f \in E \Rightarrow |f| \in E$. Então toda função contínua $f\colon M \to \mathbb{R}$ pode ser uniformemente aproximada por funções pertencentes a E.

71. Seja $X \subset \mathbb{C}^n$ compacto. Toda função contínua $f\colon X \to \mathbb{C}$ pode ser uniformemente aproximada por polinômios (com coeficientes complexos) nas variáveis $z_1, \ldots, z_n$, $\overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_n$.

72. Sejam M um espaço métrico compacto, $a \in M$ um ponto fixado e $S \subset \mathcal{C}(M; \mathbb{R})$ um conjunto de funções contínuas com as seguintes propriedades: i) S separa os pontos de $M - \{a\}$; ii) $f(a) = 0$ para toda $f \in S$; iii) se $x \neq a$ então existe $f \in S$ tal que $f(x) \neq 0$. Então toda função real contínua em M que se anula no ponto a pode ser uniformemente aproximada por polinômios sem termo constante nas funções de S.

73. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto. Diz-se que uma função real contínua $f\colon U \to \mathbb{R}$ é *nula no bordo* de U quando, para todo $\varepsilon > 0$, existe $K \subset U$ compacto tal que $x \in U - K \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$. Indiquemos com $\mathcal{C}_*(U; \mathbb{R})$ a álgebra das funções contínuas em U que são nulas

no bordo, com a norma $||f|| = \sup_{x \in U} |f(x)|$. Seja $A \subset \mathcal{C}_*(U;\mathbb{R})$ uma subálgebra que separa pontos e tal que, para todo $x \in U$ existe $g \in A$ com $g(x) \neq 0$. Prove que toda função contínua $f\colon U \to \mathbb{R}$ que se anula no bordo pode ser uniformemente aproximada por funções pertencentes a A.

74. Generalize o exercício anterior para um espaço métrico localmente compacto arbitrário N em lugar de U. (Chame as funções $f \in \mathcal{C}_*(N;\mathbb{R})$ de *nulas no infinito*.)

75. Sejam M um espaço compacto e $A \subset \mathcal{C}(M;\mathbb{R})$ uma subálgebra que separa pontos de M mas não é densa em $\mathcal{C}(M;\mathbb{R})$. Mostre que existe um (único) ponto $x_0 \in M$ tal que, indicando com $\mathcal{C}_{x_0}(M;\mathbb{R})$ o conjunto das funções contínuas $f\colon M \to \mathbb{R}$ que se anulam no ponto x_0, A é um subconjunto denso de $\mathcal{C}_{x_0}(M;\mathbb{R})$. (*Sugestão*: toda função contínua $f\colon M \to \mathbb{R}$ é limite uniforme de uma seqüência de polinômios nas funções de A. Se existir um ponto $x_0 \in M$, no qual todas as funções de A se anulam então $f(x_0) = 0 \Rightarrow f = \lim p_n(f_n)$, uniformemente, onde $f_n \in A$ e $p_n(0) = 0$. Se, porém, para cada $x \in M$ existir $f \in A$ com $f(x) \neq 0$, mostre que para quaisquer $x \neq y$ em M existe $f \in A$ com $f(x) \cdot f(y) \neq 0$ e $f(x) \neq f(y)$. Em seguida mostre que, dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ quaisquer, existem $s, t \in \mathbb{R}$ tais que $g = s \cdot f + t \cdot f^2$ cumpre $g(x) = \alpha$ e $g(y) = \beta$. Conclua que A é densa em $\mathcal{C}(M;\mathbb{R})$.)

76. Sejam M compacto e $A \subset \mathcal{C}(M;\mathbb{R})$ uma subálgebra. Se uma função contínua $f\colon M \to \mathbb{R}$ pode ser aproximada por uma função de A em cada par de pontos de M então $f \in \overline{A}$.

77. Seja $c_n = \int_{-1}^{+1} (1 - t^2)^n \, dt$. Prove que $\lim_{n \to \infty} c_n = 0$.

Capítulo 9

Espaços Separáveis

1 Propriedades gerais

Lembramos que uma coleção $\mathcal{B}$ de abertos num espaço métrico M chama-se uma *base* quando todo aberto $A \subset M$ se exprime como reunião $A = \cup B_\lambda$ de conjuntos $B_\lambda \in \mathcal{B}$. Isto equivale a dizer que, dados arbitrariamente A aberto em M e $x \in A$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset A$. Em particular, diz-se que M tem *base enumerável* quando existe uma coleção enumerável $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_n, \dots\}$ de abertos de M tais que todo aberto de M é reunião de conjuntos B_n.

Lembramos também que um subconjunto $E \subset M$ diz-se *denso* em M quando $\overline{E} = M$, isto é, quando todo ponto de M é limite de uma seqüência de pontos de E, ou ainda, quando toda bola em M contém algum ponto de E.

Proposição 1. *As seguintes afirmações a respeito de um espaço métrico M são equivalentes:*

a) *M contém um subconjunto enumerável denso;*
b) *M possui uma base enumerável de abertos;*
c) (Propriedade de Lindelöf) *Toda cobertura aberta de M admite uma subcobertura enumerável.*

Demonstração. a) $\Rightarrow$ b). Seja E um subconjunto enumerável denso em M. Indiquemos com $\mathcal{B}$ a coleção das bolas abertas que têm centro num ponto de E e raio racional. $\mathcal{B}$ é uma coleção enumerável de abertos de M. Afirmamos que $\mathcal{B}$ é uma base. Com

efeito, sejam $A \subset M$ aberto e $x \in A$. Existem $r > 0$ racional tal que $B(x; 2r) \subset A$ e $y \in E$ tal que $d(x, y) < r$. A bola aberta $B(y; r)$ pertence a $\mathcal{B}$. Além disso, $z \in B(y, r) \Rightarrow d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < 2r$, logo $B(y, r) \subset B(x, 2r)$. Assim, $x \in B(y, r) \subset A$.

b) $\Rightarrow$ c). Seja $\mathcal{B}$ uma base enumerável de M, Dada $\mathcal{U}$, uma cobertura aberta de M, chamemos de $\mathcal{B}'$ a coleção dos abertos de $\mathcal{B}$ que estão contidos em algum conjunto de $\mathcal{U}$. A coleção $\mathcal{B}'$ é enumerável. Portanto, se escolhermos, para cada $B' \in \mathcal{B}'$, um conjunto $U' \in \mathcal{U}$ tal que $B' \subset U'$, os conjuntos U' escolhidos formam uma coleção enumerável $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$. Afirmamos que $\mathcal{U}'$ é uma cobertura de M. Com efeito, dado qualquer $x \in M$, tem-se $x \in U$ para algum $U \in \mathcal{U}$. Como $\mathcal{B}$ é uma base, existe $B' \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B' \subset U$. Então $B' \in \mathcal{B}'$ e lhe corresponde, na escolha acima feita, um conjunto $U' \in \mathcal{U}'$ com $B' \subset U'$. Logo $x \in U'$ e portanto $\mathcal{U}'$ cobre M.

c) $\Rightarrow$ a). Para cada $n \in \mathbb{N}$, as bolas abertas de raio $1/n$ constituem uma cobertura aberta de M, da qual podemos extrair uma subcobertura enumerável (usando c)). Os centros das bolas dessa subcobertura constituem um conjunto enumerável E_n tal que todo ponto de M dista menos de $1/n$ de algum ponto de E_n. Segue-se que $E = \bigcup_n E_n$ é um subconjunto enumerável denso em M.

Um espaço métrico M chama-se *separável* quando cumpre uma das (e portanto todas) as condições a), b) e c) da Proposição 1.

Exemplo 1. Todo espaço métrico enumerável é separável: ele próprio é um subconjunto denso enumerável..

Exemplo 2. $\mathbb{R}$ é separável, pois os racionais constituem um subconjunto enumerável denso.

Exemplo 3. Um espaço métrico discreto é separável se, e somente se, é enumerável. Com efeito, o único subconjunto denso de um espaço discreto é o espaço inteiro.

Exemplo 4. Todo subconjunto X de um espaço métrico separável M é separável. Com efeito, se $\mathcal{B}$ é uma base enumerável de M, as interseções $B \cap X$, $B \in \mathcal{B}$, constituem uma base (enumerável) de X. [Verificação: todo aberto em X é da forma $A \cap X$, com A aberto em M. Temos $A = \bigcup_n B_n$, $B_n \in \mathcal{B}$, logo $A \cap X = \bigcup_n (B_n \cap X)$.]

Exemplo 5. Todo espaço métrico compacto é separável, pois goza

evidentemente da Propriedade de Lindelöf. Um espaço totalmente limitado M é separável pois é (isométrico a) um subconjunto do seu completamento $\widehat{M}$, o qual é compacto.

Exemplo 6. O produto cartesiano $M = M_1 \times \cdots \times M_n$ é separável se, e somente se, cada um dos fatores $M_1, \ldots, M_n$ é separável. Com efeito, se $E_1 \subset M_1, \ldots, E_n \subset M_n$ são subconjuntos enumeráveis densos então $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ é enumerável e denso em M, pois $\overline{E} = \overline{E}_1 \times \cdots \times \overline{E}_n$. Reciprocamente, se M é separável, então, fixando $a = (a_1, \ldots, a_n) \in M$, vemos que cada M_i é separável, por ser isométrico ao subespaço $a_1 \times \cdots \times a_{i-1} \times M_i \times a_{i+1} \times \cdots \times a_n$ de M.

Exemplo 7. Se K é compacto e M é separável então $\mathcal{C}(K; M)$ é separável. Com efeito, sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ bases enumeráveis de K e M respectivamente. Indiquemos com $\mathcal{V}$ a coleção formada por todos os conjuntos do tipo $V = (A_1 \times B_1) \cup \cdots \cup (A_n \times B_n)$, onde $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ e $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}$, $\mathcal{V}$ é uma coleção enumerável de abertos de $K \times M$. Para cada $V \in \mathcal{V}$, seja V^* o conjunto das aplicações contínuas $f \colon K \to M$ tais que o gráfico de f está contido em V. Os conjuntos V^* assim obtidos são abertos em $\mathcal{C}(K; M)$ e a coleção $\mathcal{V}^*$, por eles constituída, é uma base enumerável de $\mathcal{C}(K; M)$. (Vide §4 do Capítulo 8.)

Exemplo 8. O produto cartesiano $M = \prod_{i=1}^{\infty} M_i$ de uma seqüência de espaços separáveis M_i é um espaço separável. Com efeito, para cada $i \in \mathbb{N}$, seja $\mathcal{B}_i$ uma base enumerável em M_i. Os conjuntos $B = B_1 \times \cdots \times B_n \times M_{n+1} \times M_{n+2} \times \ldots$, onde $B_1 \in \mathcal{B}_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}_n$, constituem uma base enumerável para M. (Vide §6 do Capítulo 5.)

Exemplo 9. Sejam $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ subespaços separáveis de um espaço métrico M. Então a reunião $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ é um subespaço separável de M. Com efeito, para cada $n = 1, 2, \ldots$ tomemos um subconjunto enumerável denso $E_n \subset X_n$. Então $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ é enumerável e, como $\overline{E} \supset \cup \overline{E}_n$, é denso em X.

Proposição 2. *Seja M um espaço métrico separável. Então:*

a) *Todo subconjunto discreto $D \subset M$ é enumerável;*

b) *Toda coleção $\mathcal{C}$ de abertos não-vazios, dois a dois disjuntos, em M, é enumerável.* (Propriedade de Cantor).

Demonstração. a) O subespaço D, sendo discreto e separável, deve ser enumerável. b) Escolhendo, em cada conjunto $C \in \mathcal{C}$, um ponto x_C, obtemos um conjunto discreto, donde enumerável. Como os conjuntos C são dois a dois disjuntos, a correspondência $C \mapsto x_C$ é injetiva, logo $\mathcal{C}$ é enumerável.

Corolário. *Num espaço métrico separável, todo subconjunto não-enumerável contém um ponto de acumulação.*

Com efeito, um subconjunto que não contém pontos de acumulação é um subespaço discreto.

Exemplo 10. O espaço $\mathcal{C}(\mathbb{R};[0,1])$, com a métrica da convergência uniforme, não é separável. Com efeito, sabemos que a coleção de todos os subconjuntos de $\mathbb{N}$ não é enumerável. Exibiremos, para cada $S \subset \mathbb{N}$ uma função contínua $f_S \colon \mathbb{R} \to [0,1]$ de modo que, dados $S, T \subset \mathbb{N}$ com $S \neq T$, tenha-se $d(f_S, f_T) = 1$. Então o subconjunto de $\mathcal{C}(\mathbb{R};[0,1])$ formado pelas funções f_S, $S \subset \mathbb{N}$, será discreto e não-enumerável. Dado $S \subset \mathbb{N}$, definiremos f_S fazendo-a igual a zero nos números reais negativos, igual a 1 nos pontos de S, a zero nos pontos de $\mathbb{N} - S$ e linear entre dois inteiros consecutivos.

Um espaço métrico M diz-se *localmente separável* quando todo ponto $x \in M$ possui uma vizinhança separável. Isto equivale a dizer que todo $x \in M$ é centro de uma bola separável.

Exemplo 11. Todo espaço localmente compacto é localmente separável. Toda variedade topológica também. O espaço de Banach $\mathcal{C}_0(\mathbb{R};\mathbb{R})$, das funções contínuas e limitadas $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com a métrica da convergência uniforme, não é separável pois contém o subespaço não-separável $\mathcal{C}(\mathbb{R};[0,1])$. Logo $\mathcal{C}_0(\mathbb{R};\mathbb{R})$ não é localmente separável, pois todo espaço vetorial normado é homeomorfo a qualquer de suas bolas.

Seja M localmente separável. Todo ponto $x \in M$ é centro de alguma bola aberta separável. Para cada $x \in M$, seja r_x o sup dos raios das bolas separáveis de centro x. Note-se que se $0 < r < r_x$ então a bola $B(x;r)$ é separável.

Segue-se daí que, para todo $x \in M$, a bola $B(x;r_x)$ é separável. Com efeito, temos $B(x;r_x) = \bigcup_n B(x;r_n)$, onde (r_n) é qualquer

seqüência crescente de números positivos tendendo para r_x.

Proposição 3. *Todo espaço métrico M localmente separável e conexo é separável.*

Demonstração. Para cada $x \in M$ seja, como acima, $B(x; r_x)$ a maior bola aberta separável de centro x. Fixemos um ponto $a \in M$. Definiremos, indutivamente, uma seqüência crescente de abertos A_n e outra de conjuntos enumeráveis E_n, onde cada E_n é denso em A_n. Para cada $x \in M$ escolhamos, de uma vez por todas, um conjunto enumerável $E(x)$, denso na bola $B(x; r_x)$. Ponhamos $A_1 = B(a; r_a)$ e $E_1 = E(a)$. Supondo definidos $A_1, \ldots, A_n$ e $E_1, \ldots, E_n$, escrevamos:

$$A_{n+1} = \bigcup_{x \in E_n} B(x; r_x) \quad \text{e} \quad E_{n+1} = \bigcup_{x \in E_n} E(x).$$

Então $A = \cup A_n$ é aberto e $E = \cup E_n$ é enumerável, denso em A. Em particular, $\overline{A} = \overline{E}$. Afirmamos que A é também fechado em M. Com efeito, $y \in \overline{A} \Rightarrow y \in \overline{E} \Rightarrow \exists\, x \in E$, $d(x, y) < r_y/2 \Rightarrow B(x; r_y/2) \subset B(y; r_y) \Rightarrow B(x; r_y/2)$ separável $\Rightarrow r_x \geq r_y/2 \Rightarrow y \in B(x; r_x) \Rightarrow y \in A$.

Corolário. *Todo espaço métrico localmente compacto e conexo é separável. Em particular, toda variedade topológica metrizável e conexa é separável.*

2 Espaços localmente compactos separáveis

Proposição 4. *As seguintes afirmações a respeito de um espaço métrico M são equivalentes:*

a) *M é localmente compacto e separável;*

b) *M é localmente compacto e $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n$, onde cada L_n é compacto;*

c) *$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ onde, para cada n, K_n é compacto e $K_n \subset \operatorname{int} K_{n+1}$;*

d) *Existe* $f\colon M \to [0, +\infty)$ *contínua tal que, para cada* $n \in \mathbb{N}$, *o conjunto* $\{x \in M; f(x) \leq n\}$ *é compacto;*

e) *A métrica de* M *é equivalente a outra, segundo a qual um subconjunto de* M *é compacto se, e somente se, é limitado e fechado.*

Demonstração. a) $\Rightarrow$ b). Para cada $x \in M$ existe uma bola compacta $B[x]$ de centro x; seja $B(x)$ a bola aberta correspondente. Pela Propriedade de Lindelöf, a cobertura $M = \bigcup_{x \in M} B(x)$ admite uma subcobertura enumerável $M = B(x_1) \cup \cdots \cup B(x_n) \cup \ldots$. Pomos $L_n = B[x_n]$.

b) $\Rightarrow$ c). Dado $M = \cup L_n$, definimos (K_n) indutivamente. Pomos $K_1 = L_1$ e, supondo $K_1, \ldots, K_n$ definidos de modo que $K_i \subset \operatorname{int} K_{i+1}$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ e $K_n \supset L_1 \cup \cdots \cup L_n$, consideramos a cobertura de $K_n \cup L_{n+1}$ por bolas compactas com centros nos pontos de $K_n \cup L_{n+1}$. Daí extraímos uma subcobertura finita e chamamos de K_{n+1} a reunião dos conjuntos dessa subcobertura. Isto conclui a demonstração desta parte.

c) $\Rightarrow$ d). Para cada $n \in \mathbb{N}$ os conjuntos K_n e $F_n = M - \operatorname{int} K_{n+1}$ são fechados disjuntos. Logo existe uma função contínua $f_n\colon M \to [0, 1]$ tal que $f_n(K_n) = 0$ e $f_n(F_n) = 1$. (Basta pôr $f_n(x) = d(x, K_n)/[d(x, K_n) + d(x, F_n)]$, por exemplo.) Definamos então $f\colon M \to [0, +\infty)$, pondo $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots$ para cada $x \in M$. Isto parece uma soma de infinitas parcelas mas, na realidade, cada ponto x em M pertence a algum K_n e então $f_n(x) = f_{n+1}(x) = \cdots = 0$, logo $f(x) = f_1(x) + \cdots + f_{n-1}(x)$. Além disso, M é reunião dos abertos $\operatorname{int} K_n$, sendo

$$f|(\operatorname{int} K_n) = (f_1 + \cdots + f_{n-1})|(\operatorname{int} K_n).$$

Logo f é contínua. Finalmente, dado $n \in \mathbb{N}$, se $x \notin \operatorname{int} K_{n+2}$ então $x \in F_{n+1}$ e daí $x \in F_i$ para todo $i \leq n+1$. Segue-se que $f_1(x) = \cdots = f_{n+1}(x) = 1$ e portanto $f(x) \geq n+1$. Assim, $f(x) \leq n \Rightarrow x \in K_{n+2}$, logo $\{x \in M; f(x) \leq n\}$ é compacto.

d) $\Rightarrow$ e). Como sabemos (vide Corolário da Proposição 6, Capítulo 2), a métrica de M é equivalente à métrica

$$d_f(x, y) = d(x, y) + |f(x) - f(y)|.$$

Se um subconjunto $X \subset M$ é limitado em relação a d_f então, em particular, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x, y \in X \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq n$, logo X está contido num compacto $\{x \in M; f(x) \leq m\}$. Assim, $X \subset M$ fechado e limitado em relação a $d_f \Rightarrow X$ compacto.

e) $\Rightarrow$ a). Se a métrica de M é tal que limitado e fechado implica compacto, então M é localmente compacto pois toda bola fechada é um conjunto limitado e fechado. Além disso, fixando $a \in M$, temos $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} B[a;n]$, uma reunião enumerável de conjuntos compactos. Escolhendo, para cada $n \in \mathbb{N}$, um subconjunto E_n, enumerável e denso em $B[a;n]$, vemos que $E = \bigcup_n E_n$ é enumerável e denso em M.

Exemplo 12. A condição $M = \cup L_n$, onde cada L_n é compacto, não implica que M seja localmente compacto, como se vê tomando $M = \mathbb{Q}$, conjunto dos números racionais, como reunião enumerável dos seus pontos.

Seja M um espaço métrico localmente compacto e separável. Dado um espaço métrico arbitrário N, no conjunto das aplicações contínuas $f\colon M \to N$ existe uma métrica, em relação à qual se tem $\lim f_n = f$ se, e somente se, $f_n \to f$ uniformemente em cada parte compacta de M. (Isto foi mostrado no §10 do Capítulo 8.) Duas quaisquer dessas métricas são equivalentes, pois estão especificados os limites das seqüências. O espaço métrico resultante é representado por $\mathcal{C}_c(M;N)$. Observamos que $\mathcal{C}_c(M;N)$ é isométrico a uma parte de um produto cartesiano de espaços métricos separáveis. Logo é um espaço separável. Quando M é compacto, $\mathcal{C}_c(M;N)$ reduz-se a $\mathcal{C}(M;N)$, com a métrica da convergência uniforme.

No caso mais geral, em que M é localmente compacto separável, a métrica de $\mathcal{C}_c(M;N)$ é definida escrevendo-se primeiro $M = \cup K_i$ como reunião enumerável de compactos, com $K_i \subset \operatorname{int} K_{i+1}$. Em seguida, dadas $f, g\colon M \to N$ contínuas, pomos $f_i = f|K_i$ e $g_i = g|K_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Finalmente, tomamos

$$d(f,g) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \, \frac{d(f_i, g_i)}{1 + d(f_i, g_i)} \, .$$

Isto equivale a considerar em $\mathcal{C}(M;N)$ a métrica induzida pela

aplicação injetiva

$$\varphi\colon \mathcal{C}(M;N) \to \prod_i \mathcal{C}(K_i;N), \varphi(f) = (f_i).$$

Como foi observado acima, duas maneiras distintas de escrever M como reunião de uma seqüência ascendente de compactos, da maneira acima, dão origem a duas métricas equivalentes em $\mathcal{C}_c(M;N)$.

3 O cubo de Hilbert como espaço separável universal

O *cubo de Hilbert* C é o subconjunto do espaço de Hilbert ℓ^2 formado pelas seqüências $x = (x_i)$ tais que $0 \leq x_i \leq 1/i$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Como conjunto, temos $C = \prod_{i=1}^{\infty}[0,1/i]$. Além disso, a métrica induzida por ℓ^2 em C é equivalente à métrica produto. Em particular, C é compacto e uma aplicação $f\colon M \to C$ é contínua se, e somente se, para cada $i \in \mathbb{N}$ é contínua a composta $f_i = p_i \circ f\colon M \to [0,1/i]$, onde $p_i\colon C \to [0,1/i]$ é a i-ésima projeção. Para todo $x \in M$, temos $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_i(x), \ldots)$. (Vide Exemplos 22 e 23, Capítulo 8.)

Mostraremos agora que todo espaço métrico separável pode ser topologicamente imerso em C.

Proposição 5. *Para todo espaço métrico separável M, existe uma aplicação $f\colon M \to C$ que é um homeomorfismo de M sobre o subconjunto $f(M) \subset C$.*

Demonstração. Seja (B_i) uma base enumerável de abertos em M. Para cada $i \in \mathbb{N}$ seja $f_i\colon M \to [0,1/i]$ a função contínua definida por

$$f_i(x) = \frac{1}{i} \cdot \frac{d(x, M - B_i)}{1 + d(x, M - B_i)}\,.$$

Tem-se $f_i(x) > 0$ se, e somente se, $x \in B_i$. Definimos a aplicação contínua $f\colon M \to C$ pondo $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_i(x), \ldots)$. Dados $x \neq y$ em M, existe um aberto básico B_i que contém x mas não contém y. Então $f_i(x) > 0$ e $f_i(y) = 0$ e daí $f(x) \neq f(y)$. Isto mostra que f é injetiva. Para provar que f é um homeomorfismo de

M sobre $f(M)$, resta ver que f transforma abertos de M em abertos de $f(M)$. Ora, todo aberto é reunião de abertos básicos. Pela igualdade $f(\bigcup B_\alpha) = \bigcup f(B_\alpha)$, é suficiente verificar que, para cada $i \in \mathbb{N}$, $f(B_i)$ é aberto em $f(M)$. Ora, como $x \in B_i \Leftrightarrow f_i(x) > 0$, vemos que $f(B_i) = \{y \in f(M); y_i > 0\}$, o que é evidentemente um conjunto aberto em $f(M)$.

4 O Teorema de Hahn-Mazurkiewicz

Sejam M um espaço métrico e $I = [0,1]$ o intervalo unitário. Mostraremos a seguir que existe um caminho sobrejetivo ("curva de Peano") $f\colon I \to M$ se, e somente se, M é compacto, conexo e localmente conexo por caminhos. Isto generaliza o Exemplo 23 do Capítulo 8. Na demonstração, usaremos o fato de que existe uma curva de Peano no cubo de Hilbert. Assinalamos aqui que é possível demonstrar a proposição abaixo supondo apenas M localmente conexo (omitindo "por caminhos") mas a prova é muito mais trabalhosa.

Lembramos que conexo e localmente conexo por caminhos $\Rightarrow$ conexo por caminhos.

Proposição 6. (*Teorema de Hahn-Mazurkiewicz*) – *A fim de que exista uma aplicação contínua sobrejetiva $f\colon I \to M$ é necessário e suficiente que M seja compacto, conexo e localmente conexo por caminhos.*

Demonstração. O resultado decorre dos lemas abaixo.

Lema 1. *Seja M compacto, conexo e localmente conexo por caminhos. Se $f\colon M \to N$ é contínua e sobrejetiva então N é compacto, conexo e localmente conexo por caminhos.*

Demonstração. Basta mostrar que N é localmente conexo por caminhos, já que as outras afirmações são evidentes. Suponha, por contradição, que existam $x \in M$ e um aberto $V \ni f(x)$ em N tal que a componente conexa por caminhos de $f(x)$ em V não seja uma vizinhança de $f(x)$. Então existe uma seqüência de pontos $x_n \in M$ tais que $f(x_n) \to f(x)$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n)$ não pode ser ligado a $f(x)$ por um caminho em V. Passando a uma subseqüência, se necessário, podemos supor que $x_n \to a \in M$. Então $f(a) = f(x)$.

Seja $U \ni a$ um aberto conexo por caminhos, tal que $f(U) \subset V$. Para todo n suficiente grande, temos $x_n \in U$. Assim x_n pode ser ligado a a por um caminho em U. Logo $f(x_n)$ se liga a $f(a) = f(x)$ por um caminho em $f(U)$, e portanto em V. Uma contradição.

Do Lema 1 decorre que a condição é necessária. Os lemas seguintes estabelecem a suficiência.

Lema 2. *Todo espaço métrico compacto M é imagem contínua de um subconjunto fechado do conjunto de Cantor K.*

Demonstração. Podemos supor M contido no cubo de Hilbert C. Pelo Exemplo 23, Capítulo 8, existe uma sobrejeção contínua $g\colon K \to C$. Tomando $F = g^{-1}(M)$ e $f = g|F$, vemos que F é fechado e $f\colon F \to M$ é uma sobrejeção contínua.

Lema 3. *Seja M compacto e localmente conexo por caminhos. Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(x, y) < \delta$ em M implica que x e y podem ser ligados por um caminho de diâmetro inferior a ε em M.*

Demonstração. M possui uma cobertura por meio de abertos de diâmetro $< \varepsilon$, conexos por caminhos. Seja $\delta > 0$ um número de Lebesgue dessa cobertura. Se $d(x, y) < \delta$ então x e y pertencem ao mesmo aberto da cobertura e portanto podem ser ligados por um caminho de diâmetro $< \varepsilon$.

Lema 4. *Seja M compacto, conexo e localmente conexo por caminhos. Dadas as seqüências (x_n) e (y_n) em M, com $\lim d(x_n, y_n) = 0$ podemos obter, para cada $n \in \mathbb{N}$, um caminho em M, ligando x_n a y_n, com diâmetro c_n, de modo que $\lim c_n = 0$.*

Demonstração. Pelo Lema 3, podemos obter uma seqüência de números positivos $\delta_1 > \delta_2 > \cdots > \delta_i > \dots$ tais que $d(x, y) < \delta_i \Rightarrow x$ e y podem ser ligados em M por um caminho de diâmetro menor do que $1/i$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\lim\limits_{i\to\infty} \delta_i = 0$ e $d(x_n, y_n) < \delta_1$ para todo n. Dado $n \in \mathbb{N}$, se $d(x_n, y_n) = 0$, ligamos x_n a y_n pelo caminho constante. Se $d(x_n, y_n) > 0$, existe i tal que $\delta_{i+1} \leq d(x_n, y_n) < \delta_i$. Neste caso, tomamos um caminho ligando x_n a y_n em M, cujo diâmetro c_n seja inferior a $1/i$. Vê-se facilmente que $\lim c_n = 0$, o que conclui a demonstração.

Lema 5. *Sejam M compacto, conexo e localmente conexo por caminhos e $F \subset I$ um subconjunto fechado. Dada qualquer aplicação contínua $f\colon F \to M$, existe um caminho $\varphi\colon I \to M$ tal que $\varphi|F = f$.*

Demonstração. Seja $I - F = \bigcup\limits_n (u_n, v_n)$ a expressão de $I - F$ como reunião de suas componentes conexas, que são os intervalos abertos disjuntos (u_n, v_n). A soma $\sum\limits_n (v_n - u_n)$ dos comprimentos desses intervalos não excede 1. Da convergência desta série, concluímos que $\lim\limits_n (v_n - u_n) = 0$. Pondo $x_n = f(u_n)$ e $y_n = f(v_n)$, a continuidade uniforme de f nos dá $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$. Então o Lema 4 fornece, para cada n, um caminho $f_n\colon [u_n, v_n] \to M$ ligando x_n a y_n, tal que, pondo $c_n = \operatorname{diam} f([u_n, v_n])$, temos $\lim c_n = 0$. Definimos $\varphi\colon I \to M$ por $\varphi|F = f$ e $\varphi|[u_n, v_n] = f_n$. Afirmamos que φ é contínua. Por contradição, suponhamos que φ seja descontínua num ponto $a \in I$. Então existem $\varepsilon > 0$ e uma seqüência de pontos $t_i \in I$ tais que $\lim\limits_{i\to\infty} t_i = a$ e $d(\varphi(t_i), \varphi(a)) \geq \varepsilon$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Não consiste em perda de generalidade fazer as seguintes hipóteses:

(1) $a \in F$. Com efeito, cada ponto de $I - F$ pertence a um intervalo aberto no qual φ é contínua.

(2) $t_i > a$ para todo i. Com efeito, passando a uma subseqüência, se necessário, podemos supor que os t_i estão todos do mesmo lado de a. Para fixar as idéias, admitamos $t_i > a$.

(3) $t_i \in I - F$ para todo i. Com efeito, sendo $\varphi|F$ contínua, (t_i) não possui subseqüência formada por pontos de F. Logo, temos $t_i \in I - F$ salvo para um número finito de índices i. Desprezando esses termos (se existirem) obtemos $t_i \in I - F$ para todo i. Para cada i, seja (u_{n_i}, v_{n_i}) o intervalo componente de $I - F$ que contém t_i.

(4) $t_i \in (u_{n_i} v_{n_i})$, com $\lim\limits_{i\to\infty} u_{n_i} = a$ e $\lim\limits_{i\to\infty} c_{n_i} = 0$. Com efeito, temos $a \leq u_{n_i} < t_i$, logo vale o primeiro limite. Além disso, nenhum intervalo componente $(u, v) \subset I - F$ pode conter t_i para uma infinidade de índices i, pois isto obrigaria $a = u$ e φ é contínua em $[u, v]$. Logo $\lim\limits_{i\to\infty} n_i = \infty$ e portanto $\lim\limits_{i\to\infty} c_{n_i} = 0$.

Para concluir a demonstração, observamos que, para todo i, vale

$$\begin{aligned}\varepsilon \leq d(\varphi(t_i), \varphi(a)) &\leq d(\varphi(t_i), \varphi(u_{n_i})) + d(\varphi(u_{n_i}), \varphi(a)) \\ &\leq c_{n_i} + d(\varphi(u_{n_i}), \varphi(a)).\end{aligned}$$

Ora, como $u_{n_i} \in F$, temos $\lim\limits_{i\to\infty} d(\varphi(u_{n_i}), \varphi(a)) = 0$. Fazendo $i \to \infty$ nas desigualdades acima, obtemos $\varepsilon \leq 0$, uma contradição.

Exemplo 13. Existe uma curva de Peano na esfera S^n e, mais geralmente, em toda variedade topológica metrizável compacta e conexa.

5 Paracompacidade

Uma família $\mathcal{C} = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos de um espaço métrico M chama-se *localmente finita* quando todo ponto $x \in M$ possui uma vizinhança que intersecta apenas um número finito de conjuntos C_λ.

Em termos mais explícitos: $\mathcal{C}$ é localmente finita se, e somente se, para cada $x \in M$ existem índices $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in L$ e uma vizinhança $V \ni x$ tais que $V \cap C_\lambda \neq \varnothing \Rightarrow \lambda \in \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$.

Exemplo 14. A família $\mathcal{C}$ que consiste de todos os intervalos de reta $(n + \infty)$, $n \in \mathbb{N}$, é localmente finita em $\mathbb{R}$.

Exemplo 15. Toda família finita é localmente finita.

Exemplo 16. Uma família $\mathcal{C} = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ diz-se *pontualmente finita* em M quando todo $x \in M$ pertence apenas a um número finito de conjuntos C_λ. Toda família localmente finita é pontualmente finita mas a recíproca é falsa: cada ponto $x \in \mathbb{R}$ pertence no máximo a um número finito de intervalos $(1/n, 2/n)$, $n \in \mathbb{N}$, mas toda vizinhança de 0 intersecta uma infinidade desses intervalos.

Exemplo 17. Seja $\mathcal{C}$ uma cobertura aberta de M tal que cada $C \in \mathcal{C}$ tem interseção não-vazia apenas com um número finito de outros conjuntos de $\mathcal{C}$. Então $\mathcal{C}$ é localmente finita. Para ver isto, basta tomar, para cada $x \in M$, como vizinhança de x algum conjunto $C \in \mathcal{C}$ que contenha esse ponto. O Exemplo 14 mostra que nem toda cobertura localmente finita é desse tipo.

Proposição 7. *Seja M um espaço métrico separável. Dada uma família localmente finita $\mathcal{C} = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$, tem-se $C_\lambda = \varnothing$ salvo para um conjunto enumerável de índices λ.*

Demonstração. Todo $x \in M$ pertence a um aberto A_x que intersecta apenas um número finito de conjuntos C_λ. Da cobertura $M = \bigcup_x A_x$, extraímos uma subcobertura enumerável $M = A_{x_1} \cup \cdots \cup A_{x_n} \cup \ldots$. O conjunto dos índices λ tais que C_λ intersecta algum A_{x_n} é enumerável. Mas C_λ intersecta um dos conjuntos A_{x_n} se, e somente se $C_\lambda \neq \varnothing$.

De agora em diante, as famílias localmente finitas num espaço métrico separável serão escritas sob a forma $\mathcal{C} = (C_n)_{n \in \mathbb{N}} = (C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots)$.

Dadas duas coberturas $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ do espaço métrico M, dizemos que $\mathcal{C}$ é *mais fina* do que $\mathcal{C}'$, ou que $\mathcal{C}$ refina $\mathcal{C}'$ quando para todo $C \in \mathcal{C}$ existe algum $C' \in \mathcal{C}'$ tal que $C \subset C'$.

Exemplo 18. Seja $\mathcal{C}$ uma cobertura aberta de M. Cada ponto $x \in M$ pertence a algum aberto $A_x \in \mathcal{C}$. Escolhendo, para cada $x \in M$, uma bola B_x com $x \in B_x \subset A_x$, obtemos uma cobertura $(B_x)_{x \in M}$, por meio de bolas abertas, que refina $\mathcal{C}$.

Exemplo 19. Toda subcobertura $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$ é um refinamento de $\mathcal{C}'$.

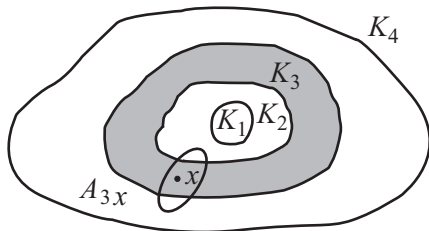
Um espaço métrico M chama-se *paracompacto* quando toda cobertura aberta de M pode ser refinada por uma cobertura aberta localmente finita. Evidentemente, todo espaço compacto é paracompacto.

Sabe-se que todo espaço métrico é paracompacto. Provaremos a seguir que todo espaço métrico separável é paracompacto. Este resultado mais fraco é bem mais fácil de demonstrar e é suficiente para muitas aplicações.

Primeiro, um resultado preparatório.

Proposição 8. *Todo espaço localmente compacto separável M é paracompacto.*

Demonstração. Pela Proposição 4, podemos escrever $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$, onde cada K_i é compacto e $K_i \subset \operatorname{int} K_{i+1}$. Seja $\mathcal{C}$ uma cobertura aberta de M. Cada ponto x do compacto K_2 pertence a um aberto

A_{2x} contido no interior de K_3 e em algum conjunto da cobertura $\mathcal{C}$. Da cobertura $K_2 \subset \bigcup_x A_{2x}$ extraímos uma subcobertura finita $\mathcal{C}_2$.

a parte hachurada é $K_3 -$ int K_2

Analogamente, a "faixa" compacta $K_3 = \operatorname{int} K_2$ possui uma cobertura aberta $K_3 = \operatorname{int} K_2 \subset \bigcup_n A_{3x}$ onde para cada x, A_{3x} está contido em int K_4, em algum conjunto de $\mathcal{C}$, e é disjunto de K_1. Dessa cobertura, extraímos uma subcobertura finita $\mathcal{C}_3$. Prosseguindo analogamente obtemos, para todo $i \geq 2$, uma cobertura aberta finita $\mathcal{C}_i$ da faixa compacta $K_{i+1} - \operatorname{int} K_i$, de modo que cada $C \in \mathcal{C}_i$ esteja contido no interior de K_{i+1}, em algum conjunto de $\mathcal{C}$ e seja disjunto de K_{i-2}. Então $\mathcal{C}' = \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3 \cup \cdots \cup \mathcal{C}_i \cup \ldots$ é uma cobertura aberta, que refina $\mathcal{C}$, e tal que cada aberto $C \in \mathcal{C}'$, estando contido em alguma $\mathcal{C}_i$, intersecta apenas um número finito dos outros conjuntos de $\mathcal{C}'$ (no máximo, os pertencentes a $\mathcal{C}_{i-2} \cup \cdots \cup \mathcal{C}_{i+2}$). Logo $\mathcal{C}'$ é localmente finita.

Proposição 9. *Todo espaço métrico separável M é paracompacto.*

Demonstração. Podemos supor $M \subset C$, onde C é o cubo de Hilbert. Dada uma cobertura $M = \bigcup_{\lambda \in L} A'_\lambda$ por meio de abertos A'_λ em M, temos, para cada $\lambda \in L$, $A'_\lambda = A_\lambda \cap M$, com A_λ aberto em C. O conjunto $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$, contém M, é aberto em C e portanto localmente compacto e separável. Pela Proposição 8, a cobertura de A pelos A_λ possui um refinamento localmente finito $A = \bigcup_\alpha U_\alpha$. Tem-se evidentemente $M \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$. Pondo $U'_\alpha = U_\alpha \cap M$, obtemos a cobertura $M = \bigcup_\alpha U'_\alpha$ aberta, localmente finita e refinando a cobertura inicial (A'_λ).

Uma das aplicações mais úteis da paracompacidade é a existência de partições da unidade. Isto é o que provaremos agora.

Dados um espaço métrico M, um espaço vetorial normado E e uma aplicação $f\colon M \to E$, o *suporte* de f é, por definição, o *fecho* do conjunto

$$\{x \in M; f(x) \neq 0\}.$$

Usaremos a notação $\operatorname{supp}(f)$ para representar o suporte de f. Dado $x \in M$, dizer que $x \notin \operatorname{supp}(f)$ significa afirmar que existe uma vizinhança de x na qual f se anula identicamente.

Exemplo 20. Dados $a \in M$ e $r > 0$, a função real contínua $f\colon M \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = d(x, M - B(a;r))$ tem suporte igual a $\overline{B(a;r)}$.

Nas condições da definição anterior, seja $(\varphi_\lambda)_{\lambda\in L}$ uma família de aplicações $\varphi_\lambda\colon M \to E$ tais que a família $(\operatorname{supp}(\varphi_\lambda))_{\lambda\in L}$ dos seus suportes seja pontualmente finita. Então a soma

$$\varphi = \sum_{\lambda\in L} \varphi_\lambda$$

faz sentido. De fato, para cada $x \in M$ existe um conjunto finito de índices $L_0 = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ tal que $\varphi_\lambda(x) = 0$ se $\lambda \notin L_0$. Definimos então $\varphi(x) = \varphi_{\lambda_1}(x) + \cdots + \varphi_{\lambda_n}(x)$.

Se $(\operatorname{supp}(\varphi_\lambda))_{\lambda\in L}$ é localmente finita e cada $\varphi_\lambda\colon M \to E$ é contínua então a soma $\varphi = \sum_\lambda \varphi_\lambda$ é uma aplicação contínua. Com efeito, para cada $x_0 \in M$ existem uma vizinhança $V \ni x_0$ e índices $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ em L tais que $\varphi(x) = \varphi_{\lambda_1}(x) + \cdots + \varphi_{\lambda_n}(x)$ *para todo* $x \in V$.

Seja M um espaço métrico. Uma *partição da unidade* em M é uma família $(\varphi_\lambda)_{\lambda\in L}$ de funções reais contínuas $\varphi_\lambda\colon M \to \mathbb{R}$ tais que:

1) Para todo $x \in M$ e todo $\lambda \in L$, tem-se $\varphi_\lambda(x) \geq 0$;
2) A família $\mathcal{C} = (\operatorname{supp}(\varphi_\lambda))_{\lambda\in L}$ é localmente finita em M;
3) Para todo $x \in M$ tem-se $\sum_{\lambda\in L} \varphi_\lambda(x) = 1$.

Note-se que, em vista de 2), a soma em 3) é finita em cada ponto $x \in M$. Além disso, $0 \leq \varphi_\lambda(x) \leq 1$ por causa de 3) e de 1). Observe-se ainda que os suportes das funções φ_λ constituem uma cobertura de M.

A definição acima inclui o caso de partições da unidade finitas, $\varphi_1+\cdots+\varphi_n=1$. É suficiente tomar $\varphi_\lambda=0$ salvo para um número finito de índices λ. Por exemplo, num espaço métrico compacto, toda partição da unidade é finita.

Seja $\mathcal{C}=(C_\lambda)_{\lambda\in L}$ uma cobertura de M. Dizemos que uma partição da unidade $\sum\limits_{\alpha\in A}\varphi_\alpha=1$ está *subordinada à cobertura* $\mathcal{C}$ quando, para todo $\alpha\in A$, existe $\lambda\in L$ tal que $\operatorname{supp}(\varphi_\alpha)\subset C_\lambda$. Em outras palavras, a cobertura formada pelos suportes das funções φ_α refina $\mathcal{C}$.

Diremos que a partição da unidade $\sum\limits_{\lambda\in L}\varphi_\lambda=1$ é *estritamente subordinada* à cobertura $\mathcal{C}$ quando $\mathcal{C}=(C_\lambda)_{\lambda\in L}$ tiver índices no mesmo conjunto L que as funções φ_λ e, além disso, $\operatorname{supp}(\varphi_\lambda)\subset C_\lambda$ para todo $\lambda\in L$.

Proposição 10. *Para toda cobertura aberta $\mathcal{C}=(C_\lambda)_{\lambda\in L}$ de um espaço métrico separável, existe uma partição da unidade $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi_n=1$ subordinada a $\mathcal{C}$.*

Demonstração. Em virtude da Proposição 9, $\mathcal{C}$ admite um refinamento localmente finito $\mathcal{A}=(A_1,\dots,A_n,\dots)$ que é ainda uma cobertura aberta. Basta obter uma partição da unidade subordinada a $\mathcal{A}$. Usaremos dois lemas.

Lema 1. *Sejam $F\subset A\subset M$, onde F é fechado e A é aberto. Existe U aberto tal que $F\subset U\subset\overline{U}\subset A$.*

Demonstração. Considere a função contínua $f\colon M\to[0,1]$ (função de Urysohn do par de fechados disjuntos F, $M-A$), definida por $f(x)=d(x,F)/[d(x,F)+d(x,M-A)]$. Temos $f(F)=0$ e $f(M-A)=1$. Basta então tomar $U=\{x\in M; f(x)<1/2\}$.

Lema 2. *Seja $(A_1,\dots,A_n,\dots)$ uma cobertura aberta enumerável de M. Existe uma cobertura aberta enumerável $(U_1,\dots,U_n,\dots)$ tal que $\overline{U}_n\subset A_n$ para todo n.*

Demonstração. Seja $F = M - \bigcup_{n\geq 2} A_n$. Aplicando o Lema 1 à inclusão $F \subset A_1$, obtemos um aberto U_1 tal que

$$\overline{U}_1 \subset A_1 \quad \text{e} \quad U_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots = M.$$

Suponhamos agora, por indução, que tenhamos obtido os abertos $U_1, \ldots, U_n$ tais que $\overline{U}_i \subset A_i$ para $1 \leq i \leq n$ e $U_1 \cup \cdots \cup U_n \cup A_{n+1} \cup A_{n+2} \cup \cdots = M$. Então aplicamos o Lema 1 à inclusão $F \subset A_{n+1}$, onde, desta vez, F é o complementar de $U_1 \cup \cdots \cup U_n \cup A_{n+2} \cup A_{n+3} \cup \ldots$. Obtemos U_{n+1} aberto, tal que $F \subset U_{n+1}$ e $\overline{U}_{n+1} \subset A_{n+1}$. A primeira destas duas inclusões nos diz que $U_1 \cup \cdots \cup U_{n+1} \cup A_{n+2} \cup \cdots = M$, o que completa a indução e prova o lema.

Voltando à demonstração da Proposição 10, tomamos, para cada $n \in \mathbb{N}$ uma função $\psi_n \colon M \to [0,1]$ tal que $\psi_n(\overline{U}_n) = 1$ e $\psi_n(M - A_n) = 0$ (função de Urysohn do par de fechados disjuntos $\overline{U}_n$ e $M - A_n$). Como o suporte de cada ψ_n está contido em A_n e a cobertura $\mathcal{A}$ é localmente finita, temos que $\psi = \sum_n \psi_n$ é uma função real contínua em M. Além disso, como cada $x \in M$ pertence a algum U_n, vemos que $\psi(x) > 0$ para todo $x \in M$. Definimos então funções contínuas $\varphi_n \colon M \to [0,1]$ pondo $\varphi_n = \psi_n/\psi$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Temos $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n = 1$ e isto nos dá a partição da unidade que procurávamos.

Trataremos agora de aperfeiçoar a Proposição 10.

Proposição 11. *Dada uma cobertura aberta $\mathcal{A} = (A_\lambda)_{\lambda\in L}$ num espaço métrico separável M, existe uma partição da unidade $\sum_{\lambda\in L} \varphi_\lambda = 1$ estritamente subordinada à cobertura $\mathcal{A}$.*

Demonstração. Seja $\sum_n \psi_n = 1$ uma partição da unidade subordinada a $\mathcal{A}$, obtida pela proposição anterior. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\lambda \in L$ tal que $\operatorname{supp}(\psi_n) \subset A_\lambda$. Tomemos uma "função de escolha" $f \colon \mathbb{N} \to L$, isto é, uma aplicação f tal que $\operatorname{supp}(\psi_n) \subset A_{f(n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $\lambda \in L$ ponhamos $\xi_\lambda = \sum_{f(n)=\lambda} \psi_n$. Como os suportes das ψ_n formam uma cobertura localmente finita, temos

$$\operatorname{supp}(\xi_\lambda) = \overline{\bigcup_{f(n)=\lambda} \operatorname{supp}(\psi_n)} = \bigcup_{f(n)=\lambda} \overline{\operatorname{supp}(\psi_n)}.$$

Afirmamos que $(\text{supp}(\xi_\lambda))_{\lambda \in L}$ é uma família localmente finita. De fato, para cada $x \in M$ existem $J = \{n_1, \ldots, n_r\} \subset \mathbb{N}$ e uma vizinhança $V \ni x$ tais que $\text{supp}(\psi_n) \cap V \neq \varnothing \Rightarrow n \in J$. Seja $L_0 = f(J)$. Se $\text{supp}(\xi_\lambda) \cap V \neq \varnothing$ então existe n tal que $f(n) = \lambda$ e $\text{supp}(\psi_n) \cap V \neq \varnothing$. Logo $n \in J$ e portanto $\lambda \in L_0$. Em suma: $\text{supp}(\xi_\lambda) \cap V \neq \varnothing \Rightarrow \lambda \in L_0$. A demonstração fica concluída pondo $\xi = \sum_{\lambda \in L} \xi_\lambda$ e $\varphi_\lambda = \xi_\lambda / \xi$.

EXERCÍCIOS DO CAPÍTULO 9

§1

1. Seja M separável. Toda baase de M contém uma base enumerável.
2. Seja X um subespaço separável de um espaço métrico M. Prove que seu fecho $\overline{X}$ é separável. Conclua que o completamento de um espaço separável é separável.
3. O espaço de Hilbert ℓ^2 é separável.
4. A imagem de um espaço separável por uma aplicação contínua $f \colon M \to N$ é separável.
5. Se M não é compacto então $\mathcal{C}(M; [0,1])$ não é separável (métrica da convergência uniforme).
6. As seguintes afirmações a respeito de um espaço métrico M são equivalentes: a) M é separável; b) Todo subconjunto discreto de M é enumerável; c) Toda coleção de abertos não-vazios dois a dois disjuntos de M é enumerável. (*Sugestão*: usar o Teorema de Zorn.)
7. Seja M separável. Dado $X \subset M$ não-enumerável, existe $x_0 \in X$ com a seguinte propriedade: para toda vizinhança V de x_0, o número cardinal de $V \cap X$ é igual ao número cardinal de X.
8. Uma *figura* Y é um subconjunto do plano formado por três segmentos de reta fechados com uma extremidade comum. Prove que toda coleção de figuras Y duas a duas disjuntas no plano é enumerável.

§2

9. Seja $f \colon M \to [0, +\infty)$ contínua. as seguintes afirmações são equivalentes: a) f é própria; b) para todo $n \in \mathbb{N}$, o conjunto $\{x \in M; f(x) \leq n\}$ é compacto; c) f, considerada como função de M em $\mathbb{R}$, é própria. Conclua que M é localmente compacto separável se, e somente se, existe uma função própria $f \colon M \to \mathbb{R}$.

10. Se N é localmente compacto e $f\colon M \to N$ é própria, então M é localmente compacto.

11. Se N é separável e $f\colon M \to N$ é própria, então M é separável.

12. Sejam M localmente compacto separável e N arbitrário. Para cada compacto $K \subset M$ e cada aberto $U \subset N$, indiquemos com $A(K;U)$ o conjunto das aplicações contínuas $f\colon M \to N$ tais que $f(K) \subset U$. Mostre que os conjuntos $A(K;U)$ formam uma base de abertos para o espaço $\mathcal{C}_c(M;N)$.

13. Sejam M, N localmente compactos separáveis e P um espaço métrico arbitrário. Mostre que a aplicação $T\colon \mathcal{C}_c(M;\mathcal{C}_c(N;P)) \to \mathcal{C}_c(M \times N;P)$, $T \cdot f = \widetilde{f}$, onde $\widetilde{f}(x,y) = f(x) \cdot y$, é bem definida e é um homeomorfismo. Mais precisamente, fixadas decomposições $M = \cup K_i$ e $N = \cup L_j$, com K_i , L_j compactos, $K_i \subset \operatorname{int} K_{i+1}$ e $L_j \subset \operatorname{int} L_{j+1}$, então T é uma isometria relativamente às métricas determinadas por essas decomposições.

14. Um espaço métrico N chama-se uma *compactificação de Alexandrov* do espaço métrico M quando N é compacto e, além disso, $N = M_0 \cup \{p\}$, com M_0 homeomorfo a M e $p \notin M_0$. O ponto p chama-se *ponto no infinito*. Prove que existe um espaço métrico N que é uma compactificação de Alexandrov de M se, e somente se, M é localmente compacto e separável. (*Sugestão*: seja $E = \mathcal{C}_0(M;\mathbb{R})$. Existe uma imersão isométrica $\varphi\colon M \to E - \{0\}$. Podemos supor que um subconjunto de M é compacto se, e somente se, é limitado e fechado. Considere o homeomorfismo $\xi\colon E - \{0\} \to E - \{0\}$, dado por $\xi(x) = x/|x|^2$. Note que $|x| \cdot |\xi(x)| = 1$. Logo $\lim |x_n| = \infty \Leftrightarrow \lim \xi(x_n) = 0$. Ponha $M_0 = \xi(M)$ e $N = M_0 \cup \{0\}$).

§3

15. Um espaço métrico é separável se, e somente se, é homeomorfo a um subconjunto de um espaço métrico compacto.

16. Seja (M,d) um espaço métrico. A fim de que d seja equivalente a uma métrica que torna M totalmente limitado é necessário e suficiente que M seja separável.

17. Todo espaço métrico localmente compacto separável é homeomorfo a um subconjunto aberto de um espaço métrico compacto.

§5

18. Seja $\mathcal{C} = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma família localmente finita em M. Para todo subconjunto compacto $K \subset M$ existe um subconjunto finito $L_0 \subset L$ tal que $K \cap C_\lambda = \varnothing \Rightarrow \lambda \in L_0$. Em particular, se M é compacto, apenas um número finito de conjuntos C_λ podem ser não-vazios.

19. Seja M localmente compacto. Uma família $\mathcal{C} = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ é localmente finita em M se, e somente se, para cada subconjunto compacto $K \subset M$ existe apenas um número finito de índices λ tais que $C_\lambda \cap K \neq \varnothing$.

20. Sejam M um espaço métrico separável, $g\colon M \to \mathbb{R}$ semicontínua inferiormente e $h\colon M \to \mathbb{R}$ semicontínua superiormente, com $g(x) < h(x)$ para todo $x \in M$. Prove que existe $f\colon M \to \mathbb{R}$ contínua, com $g(x) < f(x) < h(x)$ para todo $x \in M$.

21. Sejam G, H grupos metrizáveis. Se G é localmente compacto com base enumerável e H é localmente compacto ou completo então todo homomorfismo contínuo e sobrejetivo $f\colon G \to H$ é uma aplicação aberta.

Índice de Notações

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ representam, respectivamente, os conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais, reais e complexos.

Bibliografia

Para rever os fatos básicos sobre conjuntos e números reais, e como referência geral sobre Análise de uma variável, veja-se:

Lima, E.L. – *Curso de Análise, vol.* 1, Coleção Projeto Euclides, CNPq, 1976.

Como leitura colateral, e como introdução aos métodos geométricos da Topologia, veja-se:

Newman, M.H.A. – *Elements of the Topology of Plane Sets of Points*, Cambridge, 1939.

O livro de Newman é o primeiro texto moderno sobre Espaços Métricos e, quase trinta anos depois, ainda é um dos melhores. Em estilo claro e conciso (ao contrário do título), expõe com elegância e autoridade. Destacam-se o capítulo sobre conexidade e a primorosa demonstração do Teorema da Curva de Jordan segundo os métodos homológicos de Alexander.

Ainda como leitura colateral, como introdução ao estudo dos espaços topológicos gerais e à Análise Funcional, consulte-se:

Choquet, G. – *Cours d'Analyse, Tome II, Topologie*, Masson, Paris, 1973.

Existe uma tradução desse livro para o inglês, publicada pela Academic Press sob o título "Topology". O livro de Choquet mantém a generalidade dentro dos limites adequados, dá ênfase aos espaços métricos, contém diversas aplicações à Análise e inicia o leitor no estudo dos espaços vetoriais topológicos.

Um extenso repertório de aplicações da Topologia à Análise, que pode abrir interessantes perspectivas ao leitor, encontra-se em:

Hönig, C.S. – *Aplicações da Topologia à Análise*, Coleção Projeto Euclides, CNPq, 1976.

O prosseguimento natural dos assuntos aqui iniciados é a Topologia Geral, para cujo estudo indicamos os livros abaixo. Os dois primeiros são introdutórios e o terceiro é enciclopédico.

Lima, E.L. – *Elementos de Topologia Geral*, Ao Livro Técnico, Rio, 1970.

Munkres, J.R. – *Topology, a First Course*, Prentice-Hall, N. Jersey, 1975.

Bourbaki, N. – *Topologie Générale*, Hermann, Paris, 1954 (Capítulos I a X).

A partir daí, a Topologia se ramifica. Suas principais linhas são a Topologia Algébrica e a Topologia Diferencial, para as quais oferecemos as seguintes sugestões:

Wallace, A. – *An Introduction to Algebraic Topology*, Pergamon, N. York, 1957.

Vick, J. – *Homology Theory*, Academic Press, N. York, 1973.

Milnor, J. – *Topology from the Differentiable View-point*, Univ. of Virginia Press, 1965.

Lima, E.L. – *Introdução à Topologia Diferencial*, Notas de Matemática, IMPA, 1961.

Guillemin, V. & Pollack, A. – *Differential Topology*, Prentice-Hall, N. Jersey, 1974.

Hirsch, M.W. – *Differential Topology*, Springer, N. York, 1976.

Como introdução aos aspectos geométricos e intuitivos da Topologia, recomendamos:

Zeeman, E.C. – *Uma Introdução Informal à Topologia das Superfícies*, Monografias de Matemática, IMPA.

Courant, R. & Robbins, H. – *What is Mathematics*?, Oxford Univ. Press, London, 1948, pp. 230-271.

Blackett, D. – *Elementary Topology*, Academic Press, N. York, 1967.

Índice Remissivo

elon lages lima

Nem sempre sou igual no que digo e escrevo.
Mudo, mas não mudo muito.
A cor das flores não é a mesma ao sol
De que quando uma nuvem passa
Ou quando entra a noite
E as flores são cor da sombra.

Mas eu que falo humilde, baxo e rudo,
De vós não conhecido, nem sonhado.
Da boca dos pequenos sey contudo,
Que o louvor sae as vezes acabado,
Nem me falta na vida honesto estudo
Com longa esperiência misturado,

Fernando Pessoa, O Guardador de Rebanhos
Luís de Camões, Os Lusíadas (Canto Décimo)

espaços métricos

Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada